

مع

سلسلة رفعة

للرياضيات متعة



أسهل

أجمل

رياضيات

ع

تأليف

شيمة يوسف نافع الحربي
روان تيسير أحمد القضاة
محمد عبد الله علي الثبيتي
عواطف سليم لافي الجهني

مراجعة

لطيفة سلامه دغيشم العمار
مفلح فلاح عطيه الرادادي
هند علي محمد العديني

أبسط

أ/شيمية يوسف نافع الحربي - أ/ روان تيسير أحمد القضاة

أ/ محمد عبدالله علي الثبتي

رقم الإيداع	تاريخ	رقم الردمك
1442/ 6592	1442/08/01	978-603-03-7503-5

أ/عواطف سليم لافي الجهني

رقم الإيداع	تاريخ	رقم الردمك
1442/ 6591	1442/08/01	978-603-03-7502-8

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رُفَعَت

هي مجموعة ثدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام. وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، تقدم مجموعة رُفَعَت بين أيديكم هذا

العمل ضمن "سلسلة كُتُب رُفَعَت"

وتتميز هذه الكُتُب بما يلي:

- عرض المحتوى بصورة جذابة ومشوقة.
- عروض بصرية (باركود) في كل درس. (قناة أ/ عواطف الجهني)
- اختبار قصير بعد كل درس (اختبر نفسك).
- ملحق للإجابات لـ (اختبر نفسك) للتأكد من صحة الحل.
- روابط تحتوي على فيديوهات لشرح الدروس (قناة أ/ أحمد الفديد - أ/ عبدالوهاب العوهلي)

ونطمح من خلاله توصيل المفاهيم الرياضية وموضوعات المنهج بصورة سلسة وواضحة..

لإفادة طلابنا وطالباتنا، وتوفير جهود معلمينا ومعلماتنا الأفاضل.

والله ولي التوفيق

حسابات مجموعة رفعة الرياضيات



الدورات التدريبية



Snapchat



Twitter



المكتبة الرقمية



Instagram



YouTube



قناة رياضيات 4

لإضافة جميع حسابات وقنوات رفعة

اضغط هنا



رياضيات 4

الفصل الأول
العلاقات والدوال النسبية

الفصل الثاني
المتتابعات والمتسلسلات

الفصل الثالث
الاحتمالات

الفصل الرابع
حساب المثلثات

الفهرس

الفصل الاول : العلاقات والدوال النسبية

9	1-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها
12	1-2 جمع العبارات النسبية وطرحها
15	1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيا
17	1-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيا
20	1-5 دوال التغير
22	1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

الفصل الثاني : المتتابعات و المتسلسلات

27	2-1 المتتابعات بوصفها دوال
29	2-2 المتتابعات و المتسلسلات الحسابية
32	2-3 المتتابعات و المتسلسلات الهندسية
35	2-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية
37	2-5 نظرية ذات الحدين
39	2-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي

الفصل الثالث : الاحتمالات

44	3-1 تمثيل فضاء العينة
46	3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
49	3-3 الاحتمال الهندسي
52	3-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
55	3-5 احتمالات الحوادث المتنافية

الفصل الرابع : حساب المثلثات

60	4-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية
63	4-2 الزاوية وقياساتها
66	4-3 الدوال المثلثية للزاويا
70	4-4 قانون الجيوب
73	4-5 قانون جيب التمام
75	4-6 الدوال الدائرية
78	4-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانيا
82	4-8 الدوال المثلثية العكسية

الفصل الأول

العلاقات والدوال النسبية

1 - 1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها

الدرس

اختبر نفسك

1 - 2 جمع العبارات النسبية وطرحها

الدرس

اختبر نفسك

1 - 3 تمثيل دوال المقلوب بيانيا

الدرس

اختبر نفسك

1 - 4 تمثيل الدوال النسبية بيانيا

الدرس

اختبر نفسك

1 - 5 دوال التغير

الدرس

اختبر نفسك

1 - 6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

الدرس

اختبر نفسك



الاختبار التشخيصي

التهيئة

الوحدة الأولى:

العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 حل المعادلتين $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}$ في أبسط صورة يساوي:

- (A) $x = \frac{3}{5}$ (B) $x = \frac{5}{3}$ (C) $x = \frac{5}{12}$ (D) $x = 2$

2 حل التناسب $\frac{2}{7} = \frac{m}{5}$ في أبسط صورة

- (A) $m = \frac{7}{10}$ (B) $m = \frac{10}{7}$ (C) $m = \frac{35}{2}$ (D) $m = \frac{2}{35}$

3 $\frac{1}{8}$ هو ناتج تبسيط العبارة

- (A) $\frac{1}{4} - \frac{3}{8}$ (B) $\frac{3}{8} - \frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$ (D) $\frac{2}{9} - \frac{7}{15}$

4 18 هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد:

- (A) 9، 6، 2 (B) 1، 6، 3 (C) 12، 6، 3 (D) 9، 4، 2

5 $\frac{1}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3} =$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{-2}{8}$ (D) $\frac{11}{15}$

6 تستخدم ليلى عند خبز الكيك $\frac{2}{3}$ كوب من الحليب وتستخدم عند خبز الخبز $\frac{1}{2}$ كوب من الحليب. فكم كوب من الحليب تحتاج ليلى لعمل الطبقين؟

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{6}$

1 - 1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها



المهارات السابقة		تحليل كثيرات الحدود
المفردات		العبارة النسبية: هي النسبة بين كثيرتي حدود مثل $\frac{n+3}{n^3-4}$ ، $\frac{5}{2x-3}$
		الكسر المركب: يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورا مثل : $\frac{\frac{9}{x}}{x+6}$ ، $\frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$ ، $\frac{\frac{2n5}{8}}{\frac{n-4}{n+5}}$
المهارات الأساسية	أتعرف العبارات النسبية	أبسط العبارات النسبية
	أبسط الكسور المركبة	

تبسيط العبارات النسبية

تحليل كلا من البسط والمقام الى عوامل ثم اختصار العوامل المشتركة ثم التبسيط

الاعداد	$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$
العبارات النسبية تحليل	$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+4)}{(x+2)}$
العبارات النسبية تحليل واخراج (-1) عامل مشترك	$\frac{3-3y}{y^3-1} = \frac{3(1-y)}{(y-1)(y^2+y+1)} = \frac{-3(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$ $= \frac{-3}{(y^2+y+1)}$

قيم x التي تجعل العبارة غير معرفة :

تكون العبارة النسبية غير معرفه عند قيم المتغير التي تجعل مقامها صفرا

مثال : قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) \quad \text{نحلل المقام :}$$

$$x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$$

قيم x التي تجعل المقام يساوي صفري $x = 3, 4, 6, -6$

ضرب العبارات النسبية :

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	القاعدة
$\frac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \frac{8z}{9xy^3} = \frac{27 \cdot 8 x^2y^4z}{16 \cdot 9 xy^4 z^3}$ $= \frac{3x}{2z^2}$	مثال

قسمة العبارات النسبية :

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	القاعدة
$\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b} = \frac{12x^3y}{13ab^2} \cdot \frac{26b}{36xy^3}$ $= \frac{12 \cdot 26 x^3yb}{13 \cdot 36 ab^2xy^3}$ $= \frac{2x^2}{3aby^2}$	مثال

الكسر المركب :

هو كسر يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورا

أمثلة :

$\frac{\frac{ac}{2}}{3a}$	$\frac{2}{\frac{5x}{7y}}$	$\frac{\frac{2x}{y-3}}{\frac{7y}{1-y}}$	$1 + \frac{\frac{1}{x}}{2 - \frac{x}{y}}$
$\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}} = \frac{4x}{x+6} \div \frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}$ $= \frac{4x}{x+6} \cdot \frac{x^2+3x-18}{x^2-3x}$ $= \frac{4x}{x+6} \cdot \frac{(x+6)(x-3)}{x(x-3)}$ $= 4$			<p>لتبسيط الكسر المركب :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. اكتبه على صورة قسمة عبارتين 2. اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه 3. حلل الى العوامل 4. اختصر العوامل المشتركة 5. تبسيط

اختبر نفسك

(1-1) ضرب العبارات النسبية وقسمتها

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبت:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

تبسيط العبارة النسبية $\frac{24pn}{18p^2}$ هو:							1
3,-3	(D)	$\frac{4n}{3p}$	(C)	$\frac{4pn}{3}$	(B)	$\frac{3p}{4n}$	(A)
تبسيط العبارة النسبية $\frac{c-5}{c^2-c-20}$ هو:							2
$\frac{-1}{c+4}$	(D)	$\frac{1}{c+4}$	(C)	$\frac{5-c}{c+4}$	(B)	$\frac{5-c}{c-4}$	(A)
تبسيط العبارة النسبية $\frac{24x^3y^5}{ab} \cdot \frac{ab^2}{12x^2y^2}$							3
$2x^5y^7b^3$	(D)	$2xy^3b$	(C)	$\frac{xy^3b}{2}$	(B)	$\frac{2xy^2}{b}$	(A)
إذا كانت $r \neq \pm 2$ ، فأی مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$ ؟							4
$x^2 + xy + y^2$	(D)	$\frac{r+2}{r-4}$	(C)	$\frac{r+4}{r-2}$	(B)	$\frac{r-2}{r+4}$	(A)
قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-5x-14}{x^2+7x+10}$ غير معرفت هي							5
-5, -2	(D)	-2	(C)	0, 2, 5	(B)	-5, 2	(A)
ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفت؟							6
-7, 4	(D)	-7, 4, 7	(C)	4, 7	(B)	7, -4	(A)

1 - 2 جمع العبارات النسبية وطرحها



المهارات السابقة	جمع وطرح كثيرات الحدود
المهارات الأساسية	أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود أجمع عبارات النسبية وأطرحها

المضاعف المشترك الأصغر LCM

1. نحلل العددين او كثيرتي الحدود الى عواملها الاوليّة
2. نضرب جميع العوامل و إذا كانت مشتركة نأخذ ذات الأس الأكبر

مثال: أوجد LCM في كلا مما يلي :

$x^2 - 3x - 28, x^2 - 16$ $x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4)$ $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ $LCM = (x - 7)(x - 4)(x + 4)$	$18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$ $18a^2b^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2$ $15a^4c = 3 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot c$ $8b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot b^3$ $LCM = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c$ $= 360a^4b^3c$
--	--

جمع العبارات النسبية

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$	القاعدة
$\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3} = \frac{12y \cdot 4y^3}{5x \cdot 4y^3} + \frac{5x \cdot 5x}{5x \cdot 4y^3}$ $= \frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3}$	مثال

طرح العبارات النسبية

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$	القاعدة
$\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24} = \frac{6(3a + 2)}{6(a - 4)(a + 4)} - \frac{7(a - 4)}{6(a + 4)(a - 4)}$ $= \frac{(18a + 12) - (7a - 28)}{6(a + 4)(a - 4)}$ $= \frac{18a + 12 - 7a + 28}{6(a + 4)(a - 4)}$ $= \frac{11a + 40}{6(a + 4)(a - 4)}$	مثال

تبسيط الكسور المركبة :

يوجد طريقتان وهما :

✽ تبسيط كل من البسط والمقام على حده ثم تبسيط العبارة الناتجة

$$\frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{1 \cdot x}{y \cdot x} + \frac{1 \cdot y}{x \cdot y}} = \frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x-y}{x} \div \frac{x+y}{xy} = \frac{x-y}{x} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{y(x-y)}{x+y}$$

✽ تبسيط بإيجاد LCM لمقامات البسط والمقام ثم اختصارهما بضرب كل من بسط العبارة ومقامها في LCM

$$\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}} = \frac{\left(\frac{2}{b} + \frac{5}{a}\right) \cdot ab}{\left(\frac{3}{a} - \frac{8}{b}\right) \cdot ab} = \frac{\left(\frac{2}{b} \cdot ab + \frac{5}{a} \cdot ab\right)}{\left(\frac{3}{a} \cdot ab - \frac{8}{b} \cdot ab\right)} = \frac{2a + 5b}{3b - 8a}$$

اختبر نفسك

(1-2) جمع العبارات النسبية وطرحها

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 LCM لكثيرات الحدود الآتية: $3z + 12$, $6z + 24$ ، يساوي:

$z + 4$

(D)

$6(z + 4)$

(C)

$3(z + 4)$

(B)

$18(z + 4)$

(A)

2 LCM لكثيرات الحدود الآتية: $12a^2$ ، $15b^3$ ، $20a b^2$ ، يساوي:

$60 a^3 b^3$

(D)

$120 a^2 b^5$

(C)

$60 a^2 b^3$

(B)

$120 a^2 b^3$

(A)

3 ناتج جمع العبارتين النسبيتين $\frac{2x}{x^2+9x+18} + \frac{5}{x+6}$ هو

$\frac{7x}{(x+6)}$

(D)

$\frac{x+15}{(x+3)}$

(C)

$\frac{7x+15}{(x+6)(x+3)}$

(B)

$\frac{7x-15}{(x+6)(x+3)}$

(A)

4 ناتج طرح العبارتين النسبيتين $\frac{4}{3x+6} - \frac{x-2}{x^2-4}$

$\frac{1}{3(x+2)}$

(D)

$\frac{-1}{2(x+2)}$

(C)

$\frac{1}{2(x-2)}$

(B)

$\frac{-1}{3(x+2)}$

(A)

5 تبسيط العبارة $\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{\frac{7}{y} - \frac{4}{x}}$ هو:

$\frac{2y+3x}{7y-4x}$

(D)

$\frac{2x+3y}{7x-4y}$

(C)

$\frac{2x+3y}{7y-4x}$

(B)

$\frac{2y+3x}{7x-4y}$

(A)



1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً



المهارات السابقة	تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً
المفردات	خط التقارب - خط التقارب الرأسي - خط التقارب الأفقي دالة المقلوب - القطع الزائد
المهارات الأساسية	أحدد خصائص دوال المقلوب - أمثل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (الدالة الرئيسية (الأم))}$$

<p>التمثيل البياني للدالة الأم</p>	شكل التمثيل البياني:
	المجال والمدى:
	خطا التقارب:
	المقطعان:
	تكون الدالة غير معرفة عندما:
قطع زائد	$R - \{0\}$
	$x = 0, y = 0$
	لا يوجد
	$x = 0$

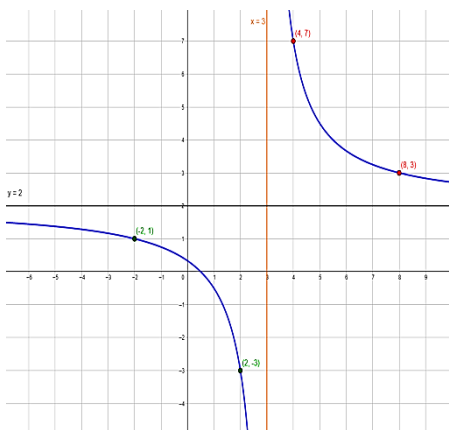
$$a \neq 0, y = \frac{a}{x-b} + c \text{ : خطوط التقارب للدالة}$$

خط التقارب الرأسي	يكون عند قيمة x التي تجعل المقام صفراً (شرط أن تكون الدالة في أبسط صورة) أي ان خط التقارب الراسي للدالة هو $x = b$
خط التقارب الأفقي	$y = c$

$$f(x) = \frac{5}{x-3} + 2 \text{ : مثال : مثل بيانياً الدالة}$$

أولاً : نحدد قيم x التي تكون الدالة عندها غير معرفة $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

لرسم : نختار قيمتين أكبر من 3 وقيمتين أصغر من 3



x	$f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$	الازواج المربّبة
8	$f(8) = \frac{5}{8-3} + 2 = \frac{5}{5} + 2 = 1 + 2 = 3$	(8, 3)
4	$f(4) = \frac{5}{4-3} + 2 = \frac{5}{1} + 2 = 5 + 2 = 7$	(4, 7)
2	$f(2) = \frac{5}{2-3} + 2 = \frac{5}{-1} + 2 = -5 + 2 = -3$	(2, -3)
-2	$f(-2) = \frac{5}{-2-3} + 2 = \frac{5}{-5} + 2 = -1 + 2 = 1$	(-2, 1)

خط التقارب الرأسي: $x = 3$

خط التقارب الأفقي: $y = 2$

خصائص الدالة

المجال: $\{x | x \neq 3\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$

اختبر نفسك

الوحدة الأولى:

(1-3) تمثيل دوال المقلوب بيانياً

العلاقات والدوال النسبية

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

شكل التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأمر) لدوال المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ هو:

1

قطع زائد

Ⓓ

دائرة

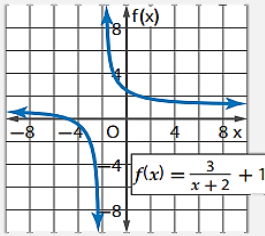
Ⓒ

قطع ناقص

Ⓑ

قطع مكافئ

Ⓐ



خط التقارب الأفقي للدالة الموضحة بالرسم المجاور:

2

$x = -2$

Ⓓ

$x = 2$

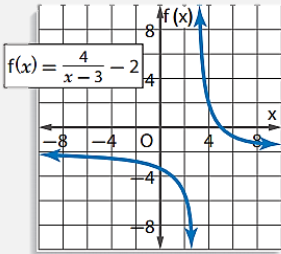
Ⓒ

$y = 1$

Ⓑ

$y = -1$

Ⓐ



خط التقارب الرأسي للدالة الموضحة بالرسم المجاور:

3

$y = 2$

Ⓓ

$y = -2$

Ⓒ

$x = 3$

Ⓑ

$x = -3$

Ⓐ

مدى الدالة $f(x) = \frac{7}{x+4} + 3$ هو:

4

$R - \{-4\}$

Ⓓ

$R - \{-3\}$

Ⓒ

$R - \{4\}$

Ⓑ

$R - \{3\}$

Ⓐ

مجال الدالة $f(x) = \frac{5}{4x-8}$ هو:

5

جميع الأعداد

Ⓓ

جميع الأعداد

Ⓒ

جميع الأعداد
الحقيقية ما عدا
الصفر

Ⓑ

جميع الأعداد
الحقيقية

Ⓐ

الحقيقية ما عدا 2

الحقيقية ما عدا 1



1-4 تمثيل الدوال النسبية بيانياً



تمثيل دوال المقلوب بيانياً	المهارات السابقة
الدالة النسبية - نقطة الانفصال	المفردات
أمثل بيانياً دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسيّة و أفقيّة أمثل بيانياً دوال نسبية لها نقاط انفصال	المهارات الأساسيّة

الدالة النسبية :

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود ، و $b(x) \neq 0$

لتمثيل الدالة النسبية بيانياً

- يجب تحديد أصفارها ، فأصفارها هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$
- يجب تحديد خطوط التقارب لها

حالات خطوط التقارب الرأسي والأفقية

إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد ، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

يوجد خط تقارب افقي واحد على الأكثر وفق الثلاث حالات التالية :			يوجد خط تقارب رأسي
المعامل الرئيس ل $a(x)$ المعامل الرئيس ل $b(x)$	$y = 0$	لا يوجد خط تقارب افقي	عندما $b(x) = 0$
إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي من درجة $b(x)$	إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$	إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$	

أمثلة لدوال نسبية مختلفة وخصائصها

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 5}$	$f(x) = \frac{6x - 3}{2x + 1}$	$f(x) = \frac{9}{x - 7}$	الدالة
$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$	$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$	$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$	خط التقارب الرأسي
$\{x x \neq 5\}$	$\{x x \neq -\frac{1}{2}\}$	$\{x x \neq 7\}$	المجال
لا يوجد خط تقارب افقي	$y = \frac{6}{2} = 3$	$y = 0$	خط التقارب الافقي
$x^2 - 4 = 0$ $(x - 2)(x + 2) = 0$ $x = 2, -2$	$6x - 3 = 0$ $x = \frac{1}{2}$	$9 \neq 0$ لا يوجد صفر للدالة	صفر الدالة

نقطة الانفصال

تظهر هذه النقطة على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالة ؛ لان الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقاط ومعرفة حولها

إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، $a(x)$ و $b(x)$ ، حيث $b(x) \neq 0$ وكان $x - c$ عاملا مشتركا بين $a(x)$ و $b(x)$ فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$ (وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يدل على وجود فجوة)

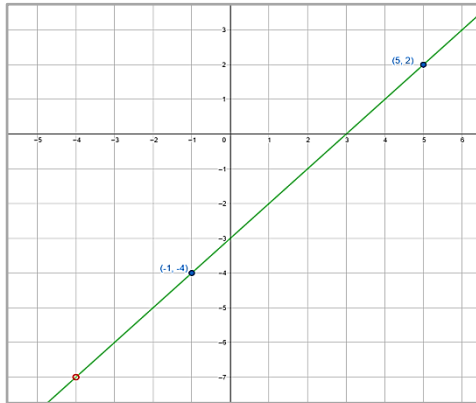
تطبيقات

• مثل بيانيا $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x+4}$

نحلل البسط لإيجاد العامل المشترك بين البسط والمقام وهو $x + 4$ اي ان $x = -4$ هي نقطة

الانفصال $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x+4} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)} = x - 3$ لذا فالتمثيل البياني ل $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x+4}$

هو نفسه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x - 3$ مع وجود فجوة في التمثيل عندما $x = -4$



لرسم

x	$f(x) = x - 3$	الازواج المرتبطة
5	$5 - 3 = 2$	(5, 2)
-1	$-1 - 3 = -4$	(-1, -4)

• أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال إن وجدت للتمثيل البياني للدالة :

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2+9x+20}$$

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2+9x+20}$$

نحلل المقام

$$f(x) = \frac{x+4}{(x+4)(x+5)}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+5)}$$
 نختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام

نقطة الانفصال : $x = -4$

خط التقارب الراسي : $x = -5$

اختبر نفسك

(1-4) تمثيل الدوال النسبية بيانياً

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ؟

(A) $x=2$ (B) $x=-2$ (C) $y=1$ (D) $y=2$

2 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ؟

(A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي

3 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ؟

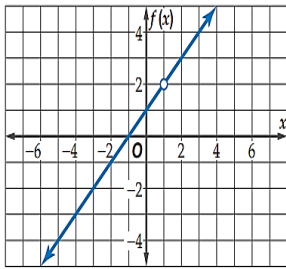
(A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي

4 ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{4x}{x^2-16}$ ؟

(A) $x=4$ (B) $x=-4$ (C) $x=4, x=-4$ (D) $x=16, x=-16$

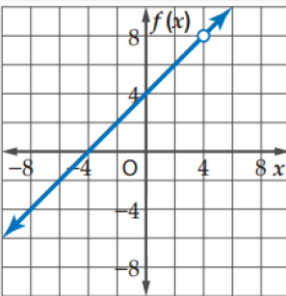
5 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{4x}{x^2-16}$ ؟

(A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي



6 نقطة الانفصال الموضحة في الشكل المجاور عند:

(A) $x=1$ (B) $x=4$ (C) $x=2$ (D) $x=0$



7 الشكل المجاور هو التمثيل للدالة:

(A) $\frac{x^2-64}{x+8}$ (B) $\frac{x^2-64}{x-8}$ (C) $\frac{x^2-16}{x+4}$ (D) $\frac{x^2-16}{x-4}$



المهارات السابقة	كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانياً
المفردات	التغير الطردي - ثابت التغير - التغير المشترك - التغير العكسي - التغير المركب
المهارات الأساسية	أحل مسائل التغير الطردي والتغير المشترك . أحل مسائل التغير العكسي والتغير المركب .

القاعدة	المفهوم	نوع التغير
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	تغير y طرديا مع x ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $y = kx$ ويسمى العدد k ثابت التغير	التغير الطردي
$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$	تغير y تغيرا مشتركا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $y = kxz$ ويسمى العدد k ثابت التغير	التغير المشترك
$x_1 y_1 = x_2 y_2$	تغير y عكسيا مع x ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ ، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ويسمى العدد k ثابت التغير	التغير العكسي
$\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$	يحدث عندما تتغير كميتا ما طرديا أو عكسيا أو كليهما معا مع كميتين أخريين أو أكثر إذا كانت y تتغير طرديا مع x ، و y تتغير عكسيا مع z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $\frac{yz}{x} = k$ حيث $z \neq 0$ و $y \neq 0$ ويسمى العدد k ثابت التغير	التغير المركب

أمثلة

<p>(2) إذا كانت y تتغير تغيرا مشتركا مع z و x $x = 2, y = 10, z = 4$ وكانت فأوجد قيمة y عندما $z = 3$ و $x = 4$ $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2} \Rightarrow \frac{10}{2 \cdot 4} = \frac{y_2}{4 \cdot 3}$ $120 = 8 y_2 \Rightarrow y_2 = 15$ ∴ $y = 15$ عندما $z = 3$ و $x = 4$</p>	<p>(1) إذا كانت y تتغير تغيرا طرديا مع x وكانت $x = 4$ عندما $y = 16$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$ $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{16}{4} = \frac{20}{x_2}$ $16x_2 = (20)(4) \Rightarrow x_2 = 5$ ∴ $x = 5$ عندما $y = 20$</p>
<p>(4) إذا كانت x تتغير عكسيا مع y وكانت $y = 12$ عندما $x = 10$ فأوجد قيمة y عندما $x = 15$ $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ $10 \cdot 12 = 15 \cdot y_2$ $y_2 = 8$</p>	<p>(3) إذا كانت a تتغير تغيرا طرديا مع b وعكسيا مع c فأوجد قيمة b عندما $c = -5$ و $a = 10$ علما بأن $b = 4$ عندما $c = 3$ و $a = -2$ $a_1 = \frac{kb_1}{c_1}, a_2 = \frac{kb_2}{c_2} \Rightarrow k = \frac{a_1 c_1}{b_1}, k = \frac{a_2 c_2}{b_2}$ $\frac{a_1 c_1}{b_1} = \frac{a_2 c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{(-2)(3)}{4} = \frac{(10)(-5)}{b_2}$ $-6 b_2 = -200 \Rightarrow b_2 = 33\frac{1}{3}$</p>

اختبر نفسك

(1-5) دوال التغير

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكان $k \neq 0$ فإن:

(A) $y = kx$ (B) $xy = k$ (C) $y = k - x$ (D) $2yx = k$

2 ما نوع التغير الذي تمثله المعادلة $z = 30x$ ؟

(A) طردي. (B) عكسي. (C) مشترك. (D) مركب.

3 إذا كانت y تتغير تغيراً طردياً مع x ، وكانت $y = 4$ عندما $x = -2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 30$

(A) $-\frac{4}{15}$ (B) 60 (C) -60 (D) $\frac{4}{15}$

4 إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y = 24$ عندما $x = 2$ و $z = 3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 1$ و $z = 5$

(A) 5 (B) 20 (C) 10 (D) 4

5 إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكان $k \neq 0$ فإن:

(A) $y = kx$ (B) $xy = k$ (C) $y = k - x$ (D) $2y + x = k$

6 ما نوع التغير الذي تمثله المعادلة $ac = 5$ ؟

(A) طردي. (B) عكسي. (C) مشترك. (D) مركب.



6-1 حل المعادلات والمتباينات النسبية



المهارات السابقة	درست تبسيط عبارات نسبية
المفردات	المعادلة النسبية - هي معادلة التي تحوي على عبارة نسبية أو أكثر المتباينة النسبية - هي متباينة التي تحوي على عبارة نسبية أو أكثر
المهارات الأساسية	أحل معادلات نسبية . أحل متباينات نسبية .

حل المعادلة النسبية

1. ضرب طرفي المعادلة ب LCM للتخلص من المقامات
2. التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا

مثال / حل المعادلة $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

الحل

LCM للمقامات هو $(x-7)(x-6)$

$$\frac{9}{\cancel{(x-7)}} \cdot \cancel{(x-7)}(x-6) - \frac{7}{\cancel{(x-6)}} \cdot (x-7)\cancel{(x-6)} = \frac{13}{\cancel{x^2-13x+42}} \cdot (x-7)\cancel{(x-6)}$$

$$9(x-6) - 7(x-7) = 13$$

$$9x - 54 - 7x + 49 = 13$$

$$2x - 5 = 13 \Rightarrow 2x = 5 + 13$$

$$\Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{2}$$

$$\Rightarrow x = 9$$

التحقق من الحل

$$\frac{9}{9-7} - \frac{7}{9-6} \stackrel{?}{=} \frac{13}{9^2 - 13(9) + 42}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{7}{3} \stackrel{?}{=} \frac{13}{6}$$

$$\frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 2} \stackrel{?}{=} \frac{13}{6}$$

$$\frac{27 - 14}{6} \stackrel{?}{=} \frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6} = \frac{13}{6}$$

حل المتباينة النسبية

1. تحديد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرا
2. حل المعادلتين المرتبطتين والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلا من رمز التباين في المتباينة
3. استعمال القيم التي في الخطوة 1 و 2 لتقسيم خط الاعداد
4. اختبار قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق اعدادها المتباينة

$$\text{مثال / حل المتباينة } \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$$

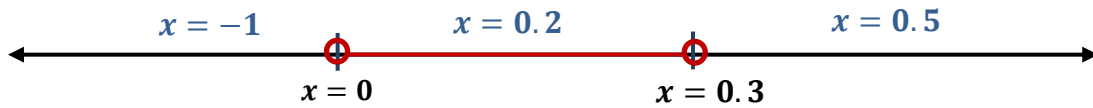
القيم المستثناة هي $x = 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 5 \Rightarrow \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot x} + \frac{1}{2x} = 5$$

$$\frac{2+1}{2x} = 5 \Rightarrow \frac{3}{2x} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2(5)} = x \Rightarrow x = \frac{3}{10} = 0.3$$

اختبار منطقتي الحل



$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{2(-1)} > 5$$

$$-1.5 > 5$$

x

$$\frac{1}{0.2} + \frac{1}{2(0.2)} > 5$$

$$7.5 > 5$$

✓

$$\frac{1}{0.5} + \frac{1}{2(0.5)} > 5$$

$$3 > 5$$

x

الجملة صحيحة عندما $x = 0.2$ ، لذا فإن الحل هو $0 < x < 0.3$

اختبر نفسك

(1-6) حل المعادلات والمتباينات النسبية

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

حل المعادلة $\frac{7}{x} + \frac{7}{12} = \frac{5}{6}$ هو:								1
\emptyset	(D)	14	(C)	-28	(B)	28	(A)	
إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$ ، فما قيمة a ؟								2
2	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	$\frac{1}{8}$	(B)	$-\frac{1}{8}$	(A)	
حل المعادلة $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$ هو:								3
$\frac{1}{2}$	(D)	$\frac{1}{4}$	(C)	$\frac{1}{5}$	(B)	$\frac{1}{10}$	(A)	
حل المعادلة $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$ هو:								4
1	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	$-\frac{1}{2}$	(B)	-1	(A)	
مجموعة حل المتباينة $\frac{5}{x} + \frac{7}{x} < 6$ هي:								5
$x < 0$	(D)	$x < 0, x > 2$	(C)	$0 < x < 2$	(B)	$x > 2$	(A)	
مجموعة حل المتباينة $\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$ هي:								6
$0 < x < 1$	(D)	$x < 0, x > 1$	(C)	$x < 1$	(B)	$x < 0$	(A)	

الفصل الثاني

المتتابعات والمتسلسلات

<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 1 المتتابعات بوصفها دوال
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 5 نظرية ذات الحدين
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	2 - 6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي

خريطة ذهنية للفصل الثاني



الاختبار التشخيصي

التهيئة

الوحدة الثانية:

المتابعات والمتسلسلات

الشعبة :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

حل المعادلة $6x - 13 = 23$								1
6	Ⓓ	5	Ⓒ	$\frac{5}{3}$	Ⓑ	-12	Ⓐ	
الدالة التي مجالها $\{2, 4, 6, 8\}$ هي								2
{(1,2),(2,4), (3,6),(4,8)}	Ⓓ	{(2,1),(4,2), (6,3),(8,4)}	Ⓒ	{(6,2),(12,4), (18,6),(24,8)}	Ⓑ	{(2,4),(4,16), (3,9),(5,25)}	Ⓐ	
أي معادلة من المعادلات التالية أحد حلولها $x = -2$:								3
$2x^2 + 4 = 12$	Ⓓ	$x^2 - 4 = 1$	Ⓒ	$x^2 - 4 = 12$	Ⓑ	$2x^2 - 4 = -12$	Ⓐ	
تريد مها أن تزرع حديقة منزلها فاشتريت 60 شتلة ورد ، زرعت في أحد جانبيها 15 شتلة وفي الجزء الثاني قررت زرع كل 9 شتلات متبقية في صف واحد فإن عدد الصفوف التي ستزرعها مها يساوي:								4
45	Ⓓ	9	Ⓒ	5	Ⓑ	4	Ⓐ	
قيمة العبارة الرياضية $2zy^x$ ، في أبسط صورة عندما $x = 3, y = \frac{1}{2}, z = -5$ تساوي:								5
$-\frac{4}{5}$	Ⓓ	$\frac{4}{5}$	Ⓒ	$-\frac{5}{4}$	Ⓑ	$\frac{5}{4}$	Ⓐ	



1-2 المتتابعات بوصفها دوال

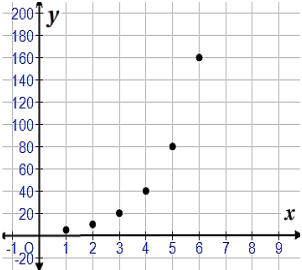
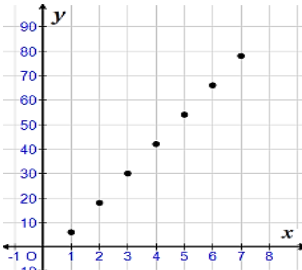


المهارات السابقة	درست الدوال الخطية والدوال الأسية
المفردات	<p>المتتابعة : مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط معين أو ترتيب محدد .</p> <p>حد المتتابعة : كل عدد في المتتابعة .</p> <p>المتتابعة المنتهية : لها عدد محدود من الحدود .</p> <p>المتتابعة الغير المنتهية : تستمر حدودها إلى ما لا نهاية</p>
المهارات الأساسية	<p>أتعرف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالة خطية .</p> <p>أتعرف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالة أسية .</p>

المتتابعة كدالة :

- **المجال**: مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها
- **المدى**: مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية
- أنواعها كثيرة ومشهورة ولعل مجال الدراسة يختص فقط بنوعين المتتابعة الحسابية - المتتابعة الهندسية

قوانين ومقارنات

المتتابعة الهندسية	المتتابعة الحسابية	الخصائص
متتابعة عددية تكون النسبة بين حدين متتاليين يساوي مقدار ثابت	متتابعة عددية يكون الفرق بين حدين متتاليين يساوي مقدار ثابت	المفهوم
يسمى بالنسبة المشتركة وهو النسبة بين كل حدين متتاليين (الحد ÷ سابقه) $r = a_2 \div a_1 = \frac{a_2}{a_1}$	يسمى بالفرق المشترك وهو الفرق بين كل حدين متتاليين (الحد - سابقه) $d = a_2 - a_1$	أساس المتابعة
<p>✳ 2, 4, 8, 16, 32, $r = 2$</p> <p>✳ 0.4, 0.004, 0.00004, $r = \frac{1}{100}$</p> <p>✳ 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{27}$, $r = \frac{2}{3}$</p>	<p>✳ متتابعة الأعداد الزوجية و $d = 2$</p> <p>✳ متتابعة الأعداد الفردية و $d = 2$</p> <p>✳ 5, 8, 11, 14, 17, ... $d = 3$</p> <p>✳ -4, -6, -8, -10, ... $d = -2$</p>	مثال
تمثيل المتتابعة الهندسية 5, 10, 20, 40, 	تمثيل المتتابعة الحسابية 6, 18, 30, 42, 	تمثيل المتتابعة
تمثل بيانيا بدالة أسية	تمثل بيانيا بدالة خطية	

اختبر نفسك

(2-1) المتتابعات بوصفها دوال

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية ، 16 ، 13 ، 10

(A) 19, 22, 25, 28 (B) 17, 18, 19, 20 (C) 19, 21, 24, 27 (D) 20, 25, 30, 35

2 الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية ، 4 ، 6 ، 9

(A) $\frac{8}{3}, \frac{16}{9}$ (B) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ (C) 2, 0 (D) 8, 16

3 يتكون مدرج من عدة صفوف، إذا كان عدد مقاعد الصف الأول 20 مقعداً، وكان كل صف يزيد على السابق له بأربعة مقاعد، ففي أي صف يكون عدد المقاعد 48 ؟

(A) الصف الرابع (B) الصف الثالث (C) الصف السادس (D) الصف السادس

4 الحد السابع للمتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 3, d = 5$

(A) 30 (B) 31 (C) 33 (D) 38

5 المتتابعة ، 3، 12، 27، 48 هي

(A) حسابية وأساسها 15 (B) حسابية وأساسها 9 (C) حسابية وأساسها 4 (D) غير ذلك



المهارات السابقة	درست تمييز المتتابعة الحسابية
المفردات	الأوساط الحسابية: هي جميع الحدود الواقعة بين حدين غير متتالين في متتابعة حسابية المتسلسلة: ونحصل عليها بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة المتسلسلة الحسابية: مجموع حدود متتابعة حسابية. المجموع الجزئي: وهو ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة ورمزه S_n رمز المجموع: هو رمز يستخدم للتعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة
المهارات الأساسية	أجد حدود متتابعة حسابية وحدها النوني . أجد أوساطا حسابية أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية

الحد النوني في المتتابعة الحسابية:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

• a_n : الحد النوني ، a_1 : الحد الأول ، n : عدد طبيعي يمثل عدد الحدود ، d : أساس المتتابعة

استخدامات قانون الحد النوني

المطلوب	مثال
إيجاد قيمة حد معين	س: أوجد الحد الستون في المتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 418$, $d = 12$ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $a_{60} = 418 + (60 - 1)(12)$ $a_{60} = 1126$ <p>نستخدم القانون نعوض بالمعطيات نبسط ونحسب</p>
إيجاد صيغة للحد النوني	اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية $4, 1, -2, -5, \dots$ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $a_1 = 4 \quad , \quad d = -3$ $a_n = 4 + (n - 1)(-3)$ $a_n = 7 - 3n$ <p>نستخدم القانون نعوض بالمعطيات نبسط ونحسب</p>
إيجاد الأوساط الحسابية	أوجد ثلاث أوساط حسابية بين $9, \dots, \dots, \dots, 93$ <p>نوجد قيمة n n تمثل عدد الحدود وهي عدد الأوساط المطلوبة + 2 $n = 3 + 2 = 5$ $a_1 = 9$, $a_n = 93$, $n = 5$ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $93 = 9 + (5 - 1)d$ $93 = 9 + 4d$ $d = 21$ $9, 30, 51, 72, 93$ <p>من المعطيات نوجد قيمة d من القانون نعوض بالمعطيات ونبسط نكتب الأوساط الثلاثة</p></p>

المتسلسلات الحسابية

صيغ المجموع	نوع الصيغة	المعطيات في السؤال	مجموع n من الحدود
$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$	العامة	a_1, a_n, n	
$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	البديلة	a_1, d, n	

مثال / أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية $n = 30$ ، $a_n = 101$ ، $a_1 = 14$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

صيغة المجموع

$$S_{30} = \frac{30}{2} (14 + 101)$$

بالتعويض بالمعطيات

$$S_{30} = 15 (115) = 1725$$

التبسيط

النتيجة

مجموع المتسلسلة هو 1725



	أوجد $\sum_{n=3}^8 (5n - 10)$
عدد الحدود	$n = 8 - 3 + 1 = 6$
الحد الأول	$a_1 = 5(3) - 10 = 5$
الحد الأخير	$a_n = 5(8) - 10 = 30$
	$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$
	$S_6 = \frac{6}{2} (5 + 30) = 3(35) = 105$

المتسلسلة المعطاة حسابية
نوجد قيم n, a_1, a_n
صيغة المجموع
بالتعويض والتبسيط

من استخدامات صيغ المجموع إيجاد حدود المتسلسلة حسب المعطيات

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة الحسابية $S_n = -1207$ ، $a_n = -85$ ، $a_1 = 14$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

أولا نوجد قيمة n من صيغة المجموع العامة

$$-1207 = \frac{n}{2} (14 + (-85))$$

$$-2414 = n(-71) \Rightarrow n = 34$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ثانيا : أوجد قيمة d من صيغة الحد النوني

$$-85 = 14 + (34-1)d$$

$$-99 = (33)d \Rightarrow d = -3$$

$$a_2 = 14 - 3 = 11$$

ثالثا: استعمل قيمة d لإيجاد a_2, a_3

$$a_3 = 11 - 3 = 8$$

اختبر نفسك

(2-2) المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

متتابعة حسابية فيها $a_1 = 15, d = 8$ فإن a_{20} تساوي

167

(D)

159

(C)

175

(B)

152

(A)

1

الحد النوني للمتتابعة الحسابية $12, 3, -6, \dots$

$-3n + 15$

(D)

$-9n - 21$

(C)

$9n + 21$

(B)

$-9n + 21$

(A)

2

$$\sum_{k=4}^{18} (6k - 1) =$$

1008

(D)

975

(C)

910

(B)

846

(A)

3

قيمة x التي تحقق ان

$$\sum_{k=5}^x (8k + 2) = 1032$$

16

(D)

15

(C)

14

(B)

13

(A)

4

الوسطين الحسابيين بين العددين 8 , 17 هما

12 , 13

(D)

9 , 13

(C)

11 , 14

(B)

10 , 12

(A)

5



المهارات السابقة	درست تمييز المتتابعة الهندسية
المفردات	الأوساط الهندسية: هي جميع الحدود الواقعة بين حدين غير متتالين في متتابعة هندسية المتسلسلة الهندسية: مجموع حدود متتابعة هندسية.
المهارات الأساسية	أجد حدود متتابعة هندسية وحدها النوني. أجد أوساطا هندسية أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية

الحد النوني في المتتابعة الهندسية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

• a_n : الحد النوني ، a_1 : الحد الأول ، n : عدد طبيعي يمثل عدد الحدود ، r : أساس المتتابعة

استخدامات قانون الحد النوني

المطلوب	مثال
إيجاد قيمة حد معين	أوجد الحد التاسع في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 8$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 9$ $a_n = a_1 r^{n-1}$ $a_9 = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}$ $a_9 = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{32}$ نستخدم القانون نعوض بالمعطيات نبسط ونوجد قيمة الحد التاسع
إيجاد صيغة للحد النوني	اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية $40, 20, 10, \dots$ $a_n = a_1 r^{n-1}$ $a_1 = 40$, $r = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $a_n = 40 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ نستخدم القانون من المعطيات نعوض من المعطيات صيغة الحد النوني
إيجاد الأوساط الهندسية	أوجد أربعة أوساط هندسية بين $2, \dots, \dots, \dots, 486$ نوجد قيمة n n تمثل عدد الحدود وهي عدد الأوساط المطلوبة + 2 $n = 4 + 2 = 6$ $a_1 = 2$, $a_n = 486$, $n = 6$ $a_n = a_1 r^{n-1}$ $486 = 2r^{6-1}$ $r^5 = 243 \Rightarrow r = \sqrt[5]{243} = 3$ $2, 6, 18, 54, 162, 486$ من المعطيات نوجد قيمة r من القانون نعوض بالمعطيات ونبسط نكتب الأوساط الثلاثة باستعمال $r=3$

المتسلسلات الهندسية

صيغ المجموع	نوع الصيغ	المعطيات في السؤال	مجموع n من الحدود
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$	العامة	a_1, a_n, r	
$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$	البديلة	a_1, d, r	

الجزئي في
متسلسلة هندسية

$$\sum_{k=2}^{32} 9(-1)^{k-1}$$

أوجد قيمة

عدد الحدود $n = 32 - 2 + 1 = 31$

الحد الأول $a_1 = 9(-1)^{2-1} = -9$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{31} = \frac{-9(1 - (-1)^{31})}{1 - (-1)} \Rightarrow S_n = \frac{-9(1+1)}{1+1} = -9$$

المتسلسلة المعطاة هندسية

$r = -1$ نوجد قيم n, a_1

صيغ المجموع

بالتعويض والتبسيط

من استخدامات صيغ المجموع إيجاد حدود المتسلسلة حسب المعطيات

أوجد a_1 في المتتابعة الهندسية : $r = -2, n = 6, S_n = 210$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$210 = \frac{a_1(1 - (-2)^6)}{1 - (-2)}$$

$$210 = \frac{a_1(1 - 64)}{1 + 2} \Rightarrow 210 = \frac{a_1(63)}{3}$$

$$210 = 21 a_1 \Rightarrow a_1 = 10$$

نعوض بالمعطيات في صيغة المجموع

اختبر نفسك

(2-3) المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبت:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

الحد النوني للمتتابعة الهندسية $2, 16, 128, \dots$ هو

1

(A) $(8)^{n-1}$ (B) $2(8)^{n-1}$ (C) $(16)^{n-1}$ (D) $2(8)^n$

الحد العاشر في المتتابعة الهندسية $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$ هو

2

(A) 1024 (B) 512 (C) 256 (D) 128

الوسط الهندسي بين العددين 4, 16

3

(A) 10 (B) -10 (C) ± 10 (D) ± 8

الوسطين الهندسيين بين العددين 9, $\frac{1}{3}$ هما

4

(A) 3, 6 (B) 1, 3 (C) 2, 4 (D) -1, -3

$$\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1} =$$

5

(A) 3069 (B) 1533 (C) 1023 (D) 3050



4-2 المتسلسلات الهندسية الانهائية



المهارات السابقة	درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية
المفردات	<p>لمتسلسلة الهندسية الانهائية: متسلسلة هندسية لها عدد لانهاية من الحدود المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهاية: S_n هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها المتسلسلة المتقاربة: عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n المتسلسلة المتباعدة: عندما لا تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n مالانهائية:</p>
المهارات الأساسية	أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي

المتسلسلات الهندسية التباعدية	المتسلسلات الهندسية التقاربية	
إذا كان $ r \geq 1$ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت	إذا كان $ r < 1$ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت	المفهوم
لا يوجد مجموع	$S = \frac{a_1}{1-r}$	المجموع
$3 + 4 + \frac{16}{3} + \dots$ $r = \frac{4}{3} > 1$ المتسلسلة الهندسية الانهائية تباعدية ولا يوجد لها مجموع	$\sum_{n=1}^{\infty} 15 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow r = \frac{4}{5} < 1$ المتسلسلة الهندسية الانهائية تقاربية يوجد لها مجموع على الصورة $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{15}{1-\frac{4}{5}} = \frac{15}{\frac{1}{5}} = 15 \times 5 = 75$	مثال



الكسر العشري الدوري: هو مجموع متسلسلة هندسية
لتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي طريقتين:

باستعمال الخصائص الجبرية	باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهاية	
<p>اكتب الكسر العشري الدوري التالي في صورة كسر اعتيادي: $0.\overline{43}$</p> $x = 0.\overline{43}$ $x = 0.43434343 \dots$ $100x = 43.43434343 \dots$ نطرح x من الطرف الايسر و $0.\overline{43}$ من الطرف الأيمن $99x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{99}$	$0.\overline{43} = 0.43 + 0.0043 + \dots$ $= \frac{43}{100} + \frac{43}{10000} + \dots$ $a_1 = \frac{43}{100}, \quad r = \frac{1}{100}$ $S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{43}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{43}{99}$	
واختصاراً		
$0.\overline{243} = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}$	$0.\overline{87} = \frac{87}{99} = \frac{29}{33}$	$0.\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

اختبر نفسك

(2-4) المتسلسلات الهندسية اللانهائية

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية ... $8 + 4 + 2 + \dots$

ليس لها مجموع	(D)	$\frac{32}{3}$	(C)	8	(B)	16	(A)
---------------	-----	----------------	-----	---	-----	----	-----

1

كتابة الكسر العشري الدوري $0.\overline{534}$ على صورة كسر اعتيادي بأبسط صورة هي:

$\frac{178}{33}$	(D)	$\frac{178}{333}$	(C)	$\frac{534}{1000}$	(B)	$\frac{534}{333}$	(A)
------------------	-----	-------------------	-----	--------------------	-----	-------------------	-----

2

المتسلسلة الهندسية اللانهائية ... $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \dots$

تباعدية و $r = 9$	(D)	تباعدية و $r = 3$	(C)	تقريبية و $r = \frac{3}{4}$	(B)	تقريبية و $r = \frac{1}{3}$	(A)
-------------------	-----	-------------------	-----	-----------------------------	-----	-----------------------------	-----

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \dots$$

غير موجودة	(D)	8	(C)	$\frac{25}{2}$	(B)	$\frac{25}{3}$	(A)
------------	-----	---	-----	----------------	-----	----------------	-----

4

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي

$\frac{1}{6 \cdot \frac{1}{3}}$	(D)	$\frac{2}{8}$	(C)	$\frac{63}{100}$	(B)	$\frac{7}{11}$	(A)
---------------------------------	-----	---------------	-----	------------------	-----	----------------	-----

5



5-2 نظرية ذات الحدين



المهارات السابقة	التوافيق واستعملاتها
المضردات	مثلاً باسكال : ويتكون المثلث من صفوف يكون بدايته كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة. نظرية ذات الحدين : تتكون من حدين مختلفين يربط بينهما علامة طرح أو جمع مرفوع لقوى n ويكون الناتج عن مثل هذه العملية ما يسمى بالمضكوك الجبري للحدود.
المهارات الأساسية	أستعمل مثلث باسكال في إيجاد معاملات مضكوك المقدار $(a + b)^n$ أستعمل نظرية ذات الحدين في إيجاد مضكوك المقدار $(a + b)^n$

	مثلث باسكال					
$(a + b)^0$	1					
$(a + b)^1$	1	1				
$(a + b)^2$	1	2	1			
$(a + b)^3$	1	3	3	1		
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1

باستخدام مثلث باسكال أوجد مضكوك $(a + b)^5$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

نظرية ذات الحدين: إذا كان $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = nC_0 a^n b^0 + nC_1 a^{n-1} b^1 + nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + nC_n a^0 b^n$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n nC_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

$$(a - 3b)^4 = \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{k!(4-k)!} a^{4-k} (-3b)^k \quad \text{أوجد مضكوك } (a - 3b)^4$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4!}{4!0!} a^4 + \frac{4!}{3!1!} a^3(-3b)^1 + \frac{4!}{2!2!} a^2(-3b)^2 + \frac{4!}{1!3!} a^1(-3b)^3 + \frac{4!}{0!4!} (-3b)^4 \\ &= a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4 \end{aligned}$$

إيجاد قيمة حد معين في مضكوك ذات الحدين

$$t_{k+1} = nC_k a^{n-k} b^k \quad \text{بتطبيق القاعدة}$$

مثال أوجد الحد الثالث في مضكوك $(x + 3y)^6$

$$t_{k+1} = nC_k a^{n-k} b^k \quad \Rightarrow \quad n = 6, \quad k = 2, \quad a = x, \quad b = 3y$$

$$t_{2+1} = 6C_2 x^{6-2} (3y)^2$$

$$t_3 = 15 x^4 \cdot 9y^2 = 135x^4y^2$$

اختبر نفسك

(2-5) نظرية ذات الحدين

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبته:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

الحد الخامس في مفعوك $(a + b)^7$ هو								1
$35a^5b^2$	Ⓓ	$21a^2b^5$	Ⓒ	$35a^3b^4$	Ⓑ	$35a^4b^3$	Ⓐ	
الحد الخامس في مفعوك $(5a - 4b)^4$ هو								2
$256b^4$	Ⓓ	$1280ab^3$	Ⓒ	$2000a^3$	Ⓑ	$2400a^2b^2$	Ⓐ	
مفعوك $(x + 2y)^3$								3
$x^3 + 8y^3$		Ⓑ	$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$	Ⓐ				
$x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + 8y^3$		Ⓓ	$x^2 + 4xy + 4y^2$	Ⓒ				
مفعوك $(1 + x)^4$								4
$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 4x^4$		Ⓑ	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	Ⓐ				
$1 + x^4$		Ⓓ	$4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	Ⓒ				
معاملات الحدود الناتجة من مفعوك $(x + y)^4$								5
1,4,6,4,1	Ⓓ	1,4,4,1	Ⓒ	1,3,3,1	Ⓑ	1,5,10,5,1	Ⓐ	

6-2 البرهان باستعمال مبدأ العد الاستقرائي الرياضي



المهارات السابقة	درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية
المفردات	مبدأ الاستقراء الرياضي: هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية. فرضية الاستقراء :
المهارات الأساسية	أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي . أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد .

مبدأ الاستقراء الرياضي

لإثبات أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n نتبع التالي

الخطوة الأولى: (الأساس) أثبت أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$

الخطوة الثانية: اكتب (فرضية الاستقراء): وهي أن نفترض أن الجملة صحيحة عندما $n = k$

الخطوة الثالثة: (خطوة استقرائية). ثبت أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$

مثال برهن صحة العبارة التالية لجميع الأعداد الصحيحة :

$$3 + 7 + 11 + \dots (4n - 1) = n(2n + 1)$$

خطوات الاستقراء الرياضي

الطرف الأيسر $3 + 7 + 11 + \dots (4n - 1)$ عندما $n = 1$ 3 صحيحة	الطرف الأيمن $n(2n + 1)$ عندما $n = 1$ $1(2(1) + 1) = 3$ صحيحة
---	---

فرضية الاستقراء

نفرض صحة العبارة عندما $n = k$

$$3 + 7 + 11 + \dots (4k - 1) = k(2k + 1)$$

صحيحة

إثبات صحة العبارة عندما $n = k + 1$

نضيف المقدار $4(k + 1) - 1$ لطرفي فرضية الاستقراء

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 11 + \dots (4k - 1) + 4(k + 1) - 1 &= k(2k + 1) + 4(k + 1) - 1 \\ &= 2k^2 + k + 4k + 4 - 1 \\ &= 2k^2 + 5k + 3 \\ &= 2k^2 + 5k + 3 \\ &= (k + 1)(2k + 3) \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المراد إثباتها، حيث استبدلت n بـ

$k + 1$ فتكون المعادلة صحيحة عندما $k + 1$

وبالتالي العبارة $3 + 7 + 11 + \dots (4n - 1) = n(2n + 1)$

صحيحة لكل n عدد طبيعي

من تطبيقات مبدأ الاستقراء الرياضي
إثبات قابلية القسمة وإعطاء مثال مضاد

مثال أوجد مثالا مضادا لنفي صحة الجملة ($x^2 + 4$ أولية أو قابلة للقسمة على 4)

بتجريب قيم ل x حيث x عدد طبيعي

قيم x	$x^2 + 4$	صحة العبارة
$x = 1$	$1^2 + 4 = 5$	أولي
$x = 2$	$2^2 + 4 = 8$	يقبل القسمة على 4
$x = 3$	$3^2 + 4 = 13$	أولي
$x = 4$	$4^2 + 4 = 20$	يقبل القسمة على 4
$x = 5$	$5^2 + 4 = 29$	أولي
$x = 6$	$6^2 + 4 = 40$	يقبل القسمة على 4
$x = 7$	$7^2 + 4 = 53$	أولي
$x = 8$	$8^2 + 4 = 68$	يقبل القسمة على 4
$x = 9$	$9^2 + 4 = 85$	مثال مضاد

لأن الناتج 85 ليس عدد أول ولا يقبل القسمة على 4

(2-6) البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

1	باستخدام البرهان بالاستقراء الرياضي فإن الفرضية التي تستخدم لإثبات صحة العبارة : $6^n - 1$ تقبل القسمة على 5 . عندما $n = k + 1$ هي :	(A) $6^k - 1 = r$	(B) $6^k - 1 = 5r$	(C) $6^k - 1 = 5$	(D) $6^{k+1} = 5r$
2	في العبارة الرياضية، $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ ووفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي ، الحد المضاف لإثبات صحة العبارة عندما $n = k + 1$ يساوي :	(A) $4k + 1$	(B) $4k + 3$	(C) $4k + 4$	(D) $4k - 1$
3	من الأمثلة المضادة التي تثبت خطأ العبارة $5 + n^2 + 1$ ، تقبل القسمة على 3 ، حيث n عدد طبيعي هي	(A) $n = 2$	(B) $n = 3$	(C) $n = 5$	(D) $n = 6$
4	العبارة الرياضية الذي يكون فيها $n = 2$ ليس مثلاً مضاداً لها هي:	(A) $7n - 5$ عدد أولي	(B) $18^n - 1$ من مضاعفات العدد 17	(C) $1 + 4 + \dots + (3n - 2) = n^3 - n^2 + 1$	(D) $n^2 + n + 1$ عدد زوجي
5	ذكر خالد أنه يوجد أربعة أزواج فقط من الأعداد الأولية الفردية المتتبعية وهي $(11, 13)$ ، $(17, 19)$ ، $(5, 7)$ ، $(3, 5)$ فإن المثال المضاد الذي يثبت خطأ ما ذكره هو:	(A) $(21, 23)$	(B) $(25, 27)$	(C) $(29, 31)$	(D) $(37, 33)$

الفصل الثالث

الاحتمالات

<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	3 - 1 تمثيل فضاء العينة
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	3 - 2 الاحتمال باستعمال التبديل
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	3 - 3 الاحتمال الهندسي
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	3 - 4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	3 - 5 احتمالات الحوادث المتنافية

الاختبار التشخيصي

التهيئة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 إذا ألقى مجسم ذو 4 وجوه متطابقت كتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4 فإن احتمال أن يكون العدد على الوجه الظاهر عدد فردي هو:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{3}{6}$

يبين الجدول أدناه نواتج تجربة استقرار مؤشر دوارة

لقرص مقسم إلى أربعة قطاعات متطابقت ومرقمة بالأعداد من 1-4
فإن الإحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد أولى يساوي:

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		3
2		7
3		6
4		4

- (A) $\frac{7}{20}$ (B) $\frac{9}{20}$ (C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{13}{20}$

3 ناتج العبارة $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2}$ في أبسط صورة

- (A) $\frac{6}{11}$ (B) $\frac{4}{27}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$

4 ألقى مجسم ذو 5 وجوه متطابقت ، كتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 5 .
فإن احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عدداً زوجياً يساوي

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 1 (D) 5

5 في تجربة سحب كرة من كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 6 صفراء و 2 خضراء .
أجاب خالد أن احتمال سحب كرة حمراء يساوي تقريباً 27% .
و أجاب محمد أن احتمال سحب كرة حمراء يساوي تقريباً 45% .
فالذي أجاب إجابة صحيحة هو

محمد

(C)

خالد

(A)



1 - 3 تمثيل فضاء العينة



المهارات السابقة	حساب الاحتمال التجريبي
المفردات	استعمل القوائم - الجدول - الرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة أستعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة
المهارات الأساسية	فضاء العينة - الرسم الشجري - تجربة ذات مرحلتين - تجربة متعددة المراحل - مبدأ العد الأساسي

تمثيل فضاء العينة:

فضاء العينة: تجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.

الحدث: هي نتيجة أو أكثر للتجربة

مثال : سحب كرتين معا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء (R) و 4 كرات خضراء (G) و 2 كرات سوداء (B). مثل فضاء العينة باستعمال القائمة المنظمة والجدول و الرسم الشجري

القائمة	الجدول	الرسم الشجري																
	<table border="1"> <tr> <td>G</td> <td>B</td> <td>R</td> <td>النواتج</td> </tr> <tr> <td>R, G</td> <td>R, B</td> <td>R, R</td> <td>R</td> </tr> <tr> <td>B, G</td> <td>B, B</td> <td>B, R</td> <td>B</td> </tr> <tr> <td>G, G</td> <td>G, B</td> <td>G, R</td> <td>G</td> </tr> </table>	G	B	R	النواتج	R, G	R, B	R, R	R	B, G	B, B	B, R	B	G, G	G, B	G, R	G	
G	B	R	النواتج															
R, G	R, B	R, R	R															
B, G	B, B	B, R	B															
G, G	G, B	G, R	G															
<p>، B, R, B, G, B, B, R, B, R, G, R, R</p> <p>G, B, G, G, G, R</p>																		

التجربة العشوائية

قد تكون على مرحلتين وتسمى تجربة ذات مرحلتين والتجارب التي تحتوي على اكثر من مرحلتين تسمى تجارب متعددة المراحل

مبدأ العد الأساسي

يمكن ايجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة أي أن في تجربة عدد مراحلها افرض أن :

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الاولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الاولى

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث k-1 من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها يساوي $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots \cdot n_k$

مثال : اوجد عدد النواتج الممكنة للموقف (يختار بدر واحد من الالوان الستة لدرجته الجديدة و أحد

تصميمين لمقاعد ها . الحل : عدد النواتج : $2 \cdot 6 = 12$

اختبر نفسك

(3-1) تمثيل فضاء العينة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

1 عدد طرق تكوين عدد مكون من 3 أرقام من الأرقام 2,3,4,5 إذا سمح بتكرار الرقم المستخدم هو

Ⓐ 120 طريقة Ⓑ 48 طريقة Ⓒ 64 طريقة Ⓓ 24 طريقة

2 عدد طرق تكوين عدد مكون من 3 أرقام من الأرقام 5,6,7,8 إذا لم يسمح بتكرار الرقم المستخدم هو

Ⓐ 120 طريقة Ⓑ 48 طريقة Ⓒ 64 طريقة Ⓓ 24 طريقة

3 تحتوي قائمة الطعام في احد المطاعم 5 أطباق رئيسية و 4 انواع حساء و 3 انواع حلوى فإن عدد الطلبات المختلفة التي يمكن تقديمها بحيث يحتوي كل منها على طبق رئيسي واحد و نوع حساء و اخر حلوى هو

Ⓐ 20 Ⓑ 120 Ⓒ 64 Ⓓ 60

أقيت قطعة نقود مرتين ، مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة أو الجداول أو الرسم الشجري . ؟



2 - 3 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



المهارات السابقة	استعمال مبدأ العد الأساسي .
المفردات	أستعمل التباديل في حساب الاحتمال استعمل التوافيق في حساب الاحتمال
المهارات الأساسية	المضروب - التباديل - التباديل الدائرية - التوافيق

التبديل : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً.

المضروب : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على صورة $n!$ ويساوي حاصل ضرب جميع

الاعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

وقد اتفق على ان

$$0! = 1$$

مثال : اوجد مضروب 5 .

$$\text{الحل : } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

التباديل: يرمز الى عدد التباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_n P_r$ حيث

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : عدد تباديل 6 عناصر مأخوذ 4 منها في كل مرة يساوي :

$${}_6 P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

التباديل مع التكرار: عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من

المرات وأخر r_2 من المرات وهكذا .. فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

مثال: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الارقام السبعة الآتية: 7,7,7,3,3,6,5 هو 6573737

$$\text{عدد التباديل : } \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{210}{2} = 105$$

$$\frac{1}{105} : \text{الاحتمال}$$

التباديل الدائرية:

1- عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة (بدون نقطة مرجعية) يساوي:

$$\frac{n!}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)!$$

2- عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة (مع نقطة مرجعية) يساوي :
 $n!$

مثال : بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة ؟

الحل : لا توجد نقطة مرجع ثابتة إذن التباديل دائرية

$$(4-1)! = 3! = 6$$

أي يوجد 6 طرق لجلوس 4 أشخاص حول منضدة مستديرة .

مثال : يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة . إذا كان في دائرة سامي 7

مقاعد ، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الاقرب الى الباب ؟

الحل : نقطة مرجعية: الاقرب الى الباب يعني انه تبديل خطي ، عدد التباديل يساوي 7!

$$\frac{6!}{7!} = \frac{\cancel{6!}}{7 \cdot \cancel{6!}} = \frac{1}{7}$$

احتمال جلوس سامي الاقرب الى الباب :

التوافيق: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم يرمز الى عدد

توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_n C_r$ حيث

$${}_n C_r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

مثال: عدد توافيق 9 عناصر مأخوذة 6 في كل مرة يساوي :

$${}_9 C_6 = \frac{9!}{6! \cdot (9-6)!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3!} = \frac{504}{6} = 84$$

اختبر نفسك

(3-2) الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كانت ${}_n P_2 = 72$ فإن قيمة n تساوي							1
9	(D)	8	(C)	7	(B)	6	(A)
إذا كانت $(n - 1)! = 5040$ فإن n تساوي							2
9	(D)	8	(C)	7	(B)	6	(A)
${}_5 C_3 =$							3
20	(D)	15	(C)	10	(B)	60	(A)
عدد طرق اختيار 3 طلاب من 7 طلاب لتمثيل المدرسة في مسابقة ما هو							4
${}_3 C_7$	(D)	7!	(C)	${}_7 P_3$	(B)	${}_7 C_3$	(A)
من 10 أعضاء مجلس إدارة شركة يراد اختيار رئيس ونائب رئيس و أمين سرفان عدد طرق الاختيار يكون							5
30 طريقة	(D)	10 طريقة	(C)	120 طريقة	(B)	720 طريقة	(A)
$5! =$							6
5	(D)	720	(C)	120	(B)	24	(A)
$\frac{80!}{79!} =$							7
80	(D)	$\frac{80}{79}$	(C)	1	(B)	80!	(A)
${}_5 P_2 =$							8
40	(D)	20	(C)	5	(B)	10	(A)

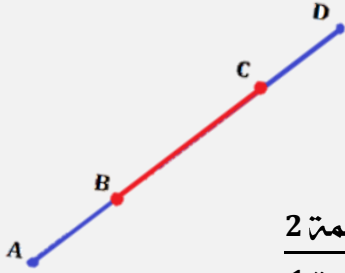


3 - 3 الاحتمال الهندسي



المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة
المفردات	إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال . أجد الاحتمالات باستعمال المساحات
المهارات الأساسية	الاحتمال الهندسي : هو احتمال يتضمن قياسا هندسيا مثل الطول او المساحة

الاحتمال والاطوال



إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)
واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيا

فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) **يساوي** :

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة 2}}{\text{طول القطعة المستقيمة 1}}$$

مثال : إذا اختيرت النقطة E عشوائيا على \overline{AD} فإن : $P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$

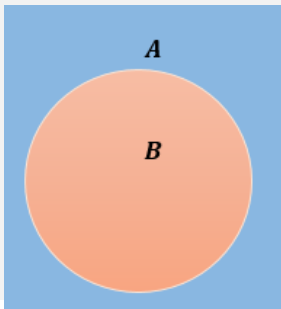
مثال : اختيرت نقطة A عشوائيا على \overline{BE} في الشكل أدناه . اوجد المطلوب فيما يلي

$$P(A \in \overline{CD}) \quad \begin{array}{c} B \quad C \quad D \quad E \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 5 \quad 12 \quad 9 \end{array} \quad P(A \in \overline{BD})$$

$$P(A \in \overline{CD}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{12}{5 + 12 + 9} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

$$P(A \in \overline{BD}) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{5 + 12}{5 + 12 + 9} = \frac{17}{26}$$

الاحتمال والمساحة



إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B

واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيا

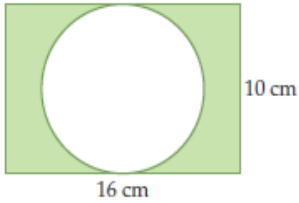
فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال إذا اختيرت النقطة E عشوائيا في المستطيل A فإن :

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

مثال إذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل المستطيل في الشكل أدناه ، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



$$r^2 \pi = 25\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحة الدائرة}$$

$$l w = 10 \cdot 16 = 160 \text{ cm}^2 \text{ مساحة المستطيل}$$

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المستطيل - مساحة الدائرة

$$\begin{aligned} & \text{مساحة المنطقة المظللة} \\ & = 160 - 25\pi = 81.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

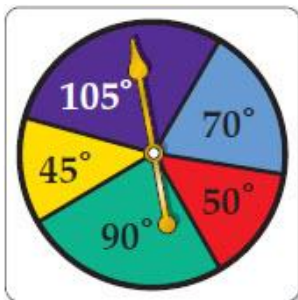
$$\begin{aligned} P(\text{وقوع النقطة في المنطقة المظللة}) &= \frac{\text{المظللة المنطقة مساحة}}{\text{مساحة المستطيل}} \\ &= \frac{81.5 \text{ cm}^2}{160 \text{ cm}^2} \approx 51\% \end{aligned}$$

الاحتمال الهندسي والقطاع الدائري

نسبة مساحة قطاع في دائرة الى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية (x°) الى 360° وعليه اذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع على يساوي $\frac{x}{360}$

مثال : استخدم القرص ذا المؤشر الدوار كما بالشكل المجاور لايجاد كل مما يلي

احتمال استقرار المؤشر على اللون الاخضر



$$\frac{x}{360} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 25\%$$

احتمال عدم استقرار المؤشر على اللون الاصفر:

$$\frac{360-45}{360} = \frac{315}{360} = \frac{7}{8} = 87.5 \%$$

اختبر نفسك

(3-3) الاحتمال الهندسي

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:



استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد

(استقرار المؤشر عند اللون الأزرق) p

1

0.19

Ⓓ

0.32

Ⓒ

0.25

Ⓑ

0.07

Ⓐ

إذا اختيرت النقطة x عشوائياً على \overline{JM} فإن احتمال أن تقع x على \overline{LM} هو



2

$\frac{11}{14}$

Ⓓ

$\frac{1}{2}$

Ⓒ

$\frac{3}{14}$

Ⓑ

$\frac{2}{7}$

Ⓐ

رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات و اختيرت نقطة عشوائياً داخل المربع فإن احتمال وقوعها داخل الدائرة يكون

3

$\frac{1}{3}$

Ⓓ

$\frac{1}{9}$

Ⓒ

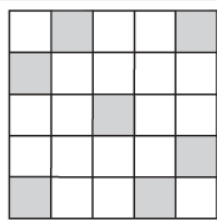
$\frac{9}{\pi}$

Ⓑ

$\frac{\pi}{9}$

Ⓐ

اختيرت نقطة واحدة عشوائياً في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع



هذه النقطة في المنطقة المظللة

4

$\frac{7}{18}$

Ⓓ

$\frac{7}{25}$

Ⓒ

$\frac{1}{6}$

Ⓑ

$\frac{1}{9}$

Ⓐ



4 - 3 احتمالات الحوادث المستقلة و الحوادث غير المستقلة



المهارات السابقة	حساب الاحتمالات البسيطة
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة . أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى .
المهارات الأساسية	الحادثة المركبة - الحوادث المستقلة - الحوادث الغير مستقلة - الاحتمال المشروط - شجرة الاحتمال - الحادثة المشروطة .

الحادثة البسيطة: هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما

الحادثة المركبة: هي الحادثة التي تتكون من حاشتين بسيطتين او اكثر

ويمكن ان تكون الحوادث المركبة مستقلة او غير مستقلة :

تكون A و B **حادثتين مستقلتين:** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين:** إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B.

ملاحظة: افترض انه تم اختيار عناصر من مجموعة ما

فإذا أعيد العنصر في كل مرة فان اختيار عناصر اخرى هي **حوادث مستقلة**

وإذا لم يرجع العنصر في كل مرة فان اختيار عناصر اخرى هي **حوادث غير مستقلة**

قانون ضرب الاحتمالات

1. احتمال حادثتين مستقلتين : احتمال وقوع حاشتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب

احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B)$$

2. احتمال حادثتين غير مستقلتين: احتمال وقوع حاشتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب

احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية **بعد** وقوع الاولى فعلا

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$$

قيم الاحتمال

1. لاي حادثة X في تجربة عشوائية

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

2. مجموع احتمالات جميع النواتج في

تجربة عشوائية يساوي 1

يقرأ الرمز $P(B \setminus A)$ احتمال وقوع الحادثة

B بشرط وقوع الحادثة A أولا وهذا يسمى

الاحتمال المشروط ويمكنك استعمال

الرسم الشجري مع الاحتمالات وتسمى شجرة

الاحتمالات

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$

مثال 1 : عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة ، ما احتمال ظهور الشعار والعدد 4

الحادثان مستقلين

A تمثل ظهور شعار عند إلقاء قطعة النقد $P(A) = \frac{1}{2}$

B تمثل ظهور العدد 4 عند رمي مكعب مرقم $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 0.0833 \approx 8.33 \%$$

مثال 2 : في تجربة سحب كراتين متتاليتين عشوائيا بدون ارجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء . ما احتمال اختيار كرة زرقاء في المرتين ؟

الحادثان غير مستقلين.

A تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الاولى $P(A) = \frac{3}{7}$

B تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الثانية $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0.143 \approx 14.3 \%$$

مثال 3 : تم توزيع 10 طلاب على فريقين ليلعبوا كرة القدم ، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1- 10 عشوائيا حيث

- يشكل الفريق A الطلاب الذين يسحبون الأعداد الفردية .
- يشكل الفريق B الطلاب الذين يسحبون الأعداد الزوجية .

ما احتمال ان يكون محمود من الفريق A قد سحب العدد 7 ؟

احتمال مشروط

A تمثل حادثة سحب عدد فردي : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

عدد النواتج = 5

B تمثل حادثة سحب العدد 7 بعد ما تم سحب الطلاب الذين من الفريق

$$P(B|A) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20 \%$$

اختبر نفسك

(3-4) احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبته :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 سوداء إذا سحبت كرتان عشوائياً على التوالي، فإن احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء يساوي:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{12}{49}$

2 عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة فإن احتمال ظهور الشعار و العدد 6 يساوي

- (A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{12}$

3 كيبس يحتوي كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء فإن احتمال سحب كرتين حمراء الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع يكون

- (A) $\frac{9}{11}$ (B) $\frac{36}{55}$ (C) $\frac{81}{121}$ (D) $\frac{1}{55}$

4 إذا كان $P(A/B) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ فإن $P(A \text{ و } B)$ تساوي

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$



3 - 5 احتمالات الحوادث المتنافية



المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث الغير مستقلة .
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث الغير متنافية أجد احتمال متممة حادثة
المهارات الأساسية	الحدثان المتنافيتان هما حادثين لم يكن وقوعهما ممكنا في الوقت نفسه ولا يوجد بينهما نواتج مشتركة الحادثة المتممة

قانوني الجمع في الاحتمالات

1. احتمال الحادثتين المتنافيتين: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتان فاحتمال وقوع A او

B يساوي مجموع احتمال كل منهما

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B)$$

2. احتمال الحادثتين غير المتنافيتين: إذا كانت الحادثتان A, B غيرمتنافيتين فاحتمال وقوع

A او B يساوي هو مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع A و B معا

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الحوادث المتممة

احتمال الحوادث المتممة: هو احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة

أي أن: لاي حادثة A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال 1: إذا كان احتمال إصابة هدف معين $\frac{2}{7}$ فأوجد احتمال عدم إصابته ؟

$$P(A) = \frac{2}{7}, \text{ تمثل إصابة الهدف}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

رمز التقاطع (\cap)

يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين معا

(وقوع الحادثتين معا)

ويشير الى ضرب الاحتمالات

$$P(B \cap A)$$

يقرأ احتمال وقوع A و وقوع B

رمز الاتحاد (\cup):

يدل على وقوع أحد الحادثين على الاقل . و

يشير الى جمع الاحتمالات

$$P(B \cup A)$$

يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B

مثال 2 : حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي الشركة وكانت جائزته أن يختار عشوائيا واحدة من بين 3 بطاقات سفر ، 6 كتب ، 9 ساعات و 7 نظارات . ما احتمال أن يربح بطاقة سفر أو كتابات أو ساعة ؟

الحادثان متنافيتين

$$\text{المجموع الكلي } 3 + 6 + 9 + 7 = 25$$

$$P(A) = \frac{3}{25} \text{ تمثل اختيار بطاقة سفر}$$

$$P(B) = \frac{9}{25} \text{ تمثل اختيار بطاقة كتب}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{18}{25} = 0.72 = 72\%$$

مثال 3 :يبين الجدول المقابل عدد طلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة . إذا اختير احد الطلاب عشوائيا اوجد احتمال أن يكون من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

الحادثان غير متنافيتين لان يوجد مشترك بينهما

$$\text{المجموع الكلي } 6 + 5 + 3 + 5 + 8 + 4 + 6 + 7 + 6 = 50$$

A تمثل اختيار طالب ان يكون من الصف الاول الثانوي

$$P(A) = \frac{6+5+3}{50} = \frac{14}{50}$$

B تمثل اختيار طالب يلعب كرة القدم

$$P(B) = \frac{5+8+7}{50} = \frac{20}{50}$$

$A \cap B$ تمثل اختيار طالب من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

$$P(A \cap B) = \frac{5}{50}$$

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{14}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} = \frac{29}{50} = 0.58 = 58\%$$

اختبر نفسك

(3-5) احتمالات الحوادث المتنافية

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء و كرة واحدة زرقاء سحبت من الكيس كرة واحدة فإن احتمال كونها حمراء أو زرقاء يساوي

$\frac{1}{4}$

(D)

$\frac{1}{8}$

(C)

$\frac{3}{8}$

(B)

$\frac{1}{2}$

(A)

2 رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 فإن احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

1

(D)

$\frac{5}{6}$

(C)

$\frac{2}{3}$

(B)

$\frac{1}{6}$

(A)

3 إذا كان احتمال ان يصيب صياد هدف ما 0.5 و احتمال ان يصيب صياد اخر نفس الهدف هو 0.6 و احتمال ان يصيبه الاثنان معا هو 0.3 فإن احتمال ان يصيبه الصياد الاول أو الثاني هو

1

(D)

0.9

(C)

0.8

(B)

1.1

(A)

4 لأي حادثة A إذا كان $P(A)=0.3$ فإن $P(\bar{A})$ تساوي

1.3

(D)

0.7

(C)

0.3

(B)

1

(A)

الفصل الرابع

حساب المثلثات

<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 2 الزوايا وقياساتها
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 3 الدوال المثلثية للزوايا
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 4 قانون الجيوب
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 5 قانون جيوب التمام
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 6 الدوال الدائرية
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً
<u>اختبر نفسك</u>	<u>الدرس</u>	4 - 8 الدوال المثلثية العكسية



الاختبار التشخيصي

التهيئة

الوحدة الرابعة:

حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

1 لدى أسامة حديقة مستطيلة الشكل بعديها 9cm ، 12cm ، أراد بناء سور على قطر الحديقة . إذا كانت تكلفة بناء المتر الواحد للسور يساوي 120 ريال، فكم ستبلغ تكلفة بناء السور كاملاً ؟

2000 ريال

Ⓐ

1800 ريال

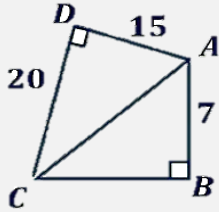
Ⓑ

1200 ريال

Ⓒ

800 ريال

Ⓓ



2 في الشكل المقابل طول الضلع \overline{CB} يساوي:

30

Ⓐ

24

Ⓑ

20

Ⓒ

7

Ⓓ

3 الأطوال التي تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث قائم الزاوية من بين الأطوال المعطاة هي

9 , 10 , 8

Ⓐ

25 , 20 , 15

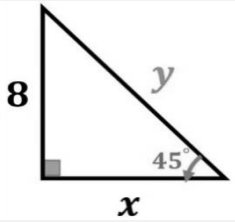
Ⓑ

10 , 6 , 12

Ⓒ

2 , 4 , 6

Ⓓ



4 قيمة y في الشكل المقابل تساوي

4

Ⓐ

8

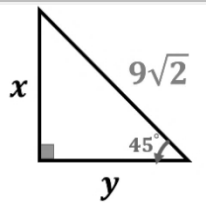
Ⓑ

$4\sqrt{2}$

Ⓒ

$8\sqrt{2}$

Ⓓ



5 قيم x, y في الشكل المجاور

$x = 9, y = 9$

Ⓐ

$x = 4.5, y = 3$

Ⓑ

$x = 9\sqrt{2}, y = 3$

Ⓒ

$x = \sqrt{2}, y = 3\sqrt{2}$

Ⓓ



1 - 4 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



المهارات السابقة	نظرية فيثاغورس
المفردات	<p>حساب المثلثات: فرع من أفرع الرياضيات والذي يدرُس العلاقة بين أضلاع المثلثات وزواياهم</p> <p>النسبة المثلثية: مقاييسُ خاصَّة للمثلث القائم وهي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم</p> <p>الدالة المثلثية: مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه</p> <p>الجيب ، جيب التمام ، الظل ، ظل التمام ، القاطع ، قاطع التمام</p> <p>دوال المقلوب: هي مقلوب النسب الجيب ، جيب التمام ، الظل</p> <p>معكوس الجيب لـ x: هي الزاوية التي جيبها x</p> <p>معكوس جيب التمام لـ x: هي الزاوية التي جيب تمامها x</p> <p>معكوس الظل x: هي الزاوية التي ظلها x</p> <p>زاوية الارتفاع: هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي.</p> <p>زاوية الانخفاض: هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي</p>
	<p>أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة .</p> <p>أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية .</p>

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ الجيب		$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ قاطع التمام
$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ جيب التمام		$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ القاطع
$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ الظل		$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ ظل التمام

دوال المقلوب

$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

مثال: في المثلث أدناه فيه طول ضلعين فيه (5، 13) أوجد الدوال المثلثية للزاوية θ أولاً نوجد طول الضلع الثالث

$\sin \theta = \frac{5}{13}$		$\csc \theta = \frac{13}{5}$
$\cos \theta = \frac{12}{13}$		$\sec \theta = \frac{13}{12}$
$\tan \theta = \frac{5}{12}$		$\cot \theta = \frac{12}{5}$

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

معكوس النسب المثلثية (لإيجاد قياس الزاوية θ)

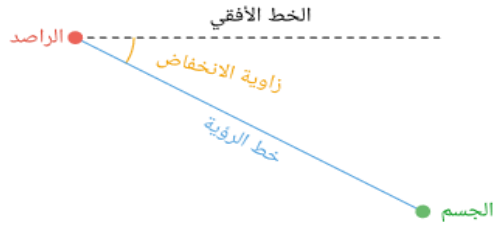
$$\sin^{-1} x = \theta$$

$$\cos^{-1} x = \theta$$

$$\tan^{-1} x = \theta$$

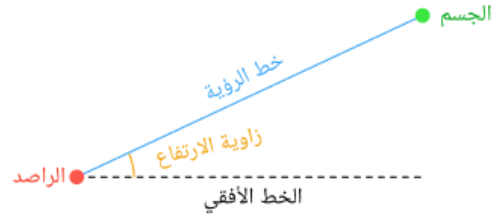
زوايا الانخفاض

هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي



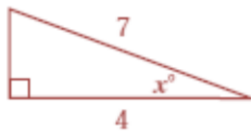
زوايا الارتفاع

هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي.



تطبيقات

أوجد قيمة x في الشكل المقابل



المعطيات: مثلث قائم الزاوية فيه الوتر = 7

الضلع المجاور للزاوية $x = 4$

المطلوب قياس الزاوية x

الحل: نستخدم الدوال العكسية لإيجاد

الزاوية ومنها تحديد الدالة جيب التمام

$$\cos x = \frac{4}{7}$$

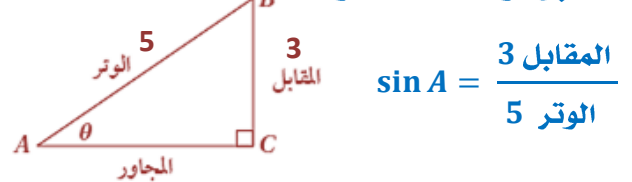
$$x = \cos^{-1} \frac{4}{7}$$

$$x = 55.2^\circ$$

إذا كان $\sin A = \frac{3}{5}$ أوجد $\cos A$.

الخطوة 1: ارسم مثلثاً قائم الزاوية، وسم إحدى زواياه الحادة A بوضع العدد 3 طولاً للضلع

المقابل والعدد 5 طولاً للوتر.



$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد

قيمة الضلع المجاور = المجاور

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

الخطوة 3: نوجد $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

اختبر نفسك

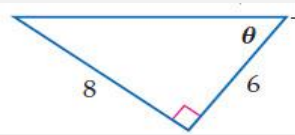
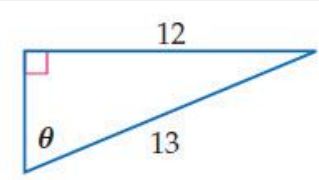
(4-1) الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:


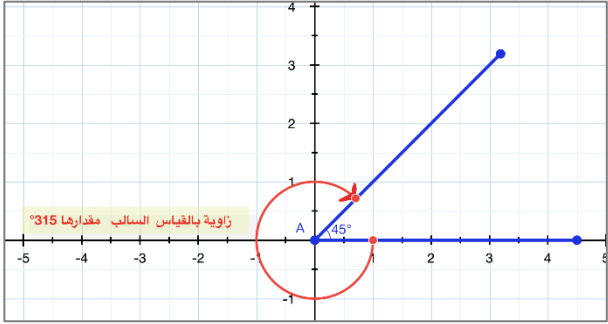

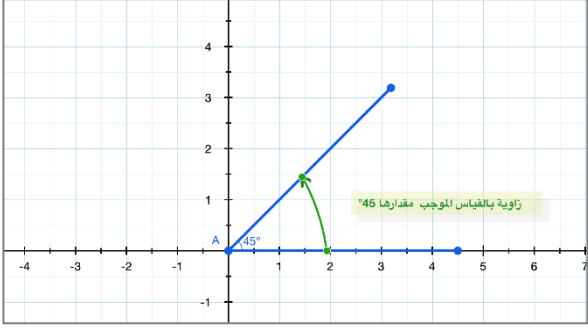
اختر الإجابة الصحيحة:

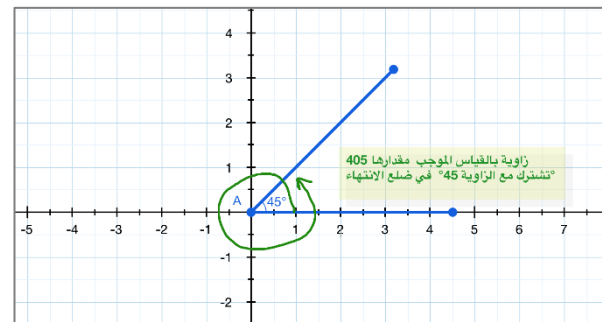
$\sin \theta$ تساوي								1
<u>المجاور</u> المقابل	(D)	<u>المجاور</u> الوتر	(C)	<u>المقابل</u> الوتر	(B)	<u>الوتر</u> المقابل	(A)	
$\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ يساوي								2
$\tan \theta$	(D)	$\cot \theta$	(C)	$\sec \theta$	(B)	$\csc \theta$	(A)	
من الشكل المقابل تكون $\sec \theta$ تساوي								3
								
$\frac{5}{4}$	(D)	$\frac{5}{3}$	(C)	$\frac{4}{5}$	(B)	$\frac{3}{5}$	(A)	
من الشكل المقابل تكون $\csc \theta$ تساوي								4
								
$\frac{13}{12}$	(D)	$\frac{5}{13}$	(C)	$\frac{13}{5}$	(B)	$\frac{12}{13}$	(A)	
إذا كانت $\cos \beta = \frac{3}{5}$ فإن $\tan \beta$ تساوي								5
$\frac{4}{3}$	(D)	$\frac{5}{4}$	(C)	$\frac{4}{5}$	(B)	$\frac{3}{4}$	(A)	



<p>المهارات السابقة</p>	<p>أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها .</p>
<p>المفردات</p>	<p>الوضع القياسي : للزاوية إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب لمحور X .</p> <p>ضلع الابتداء : للزاوية هو الضلع المنطبق على المحور X.</p> <p>ضلع الانتهاء : للزاوية هو الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل .</p> <p>الراديان : وحدة قياس للزوايا وهي الزاوية المركزية في دائرة التي تقابل قوساً طوله مساو لطول نصف قطر الدائرة.</p> <p>الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة .</p> <p>طول القوس :</p>

<p>الزوايا</p>	<p>الوضع القياسي للزوايا</p>
<p>يعادل الراديان الواحد $\frac{180}{\pi}$ درجات أي بالتقريب 57.296°</p> 	

<p>القياس السالب</p>	<p>القياس الموجب</p>
 	 



عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: $45^\circ, 405^\circ, -315^\circ$

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360° .

إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

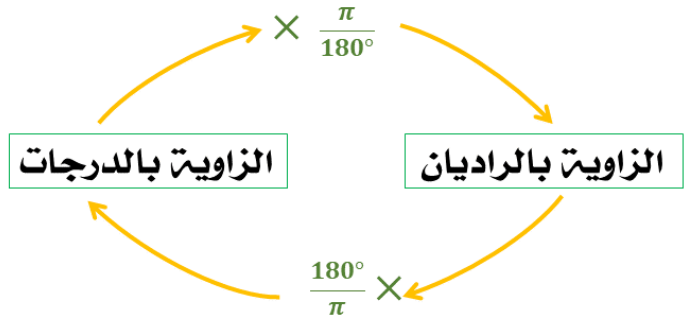
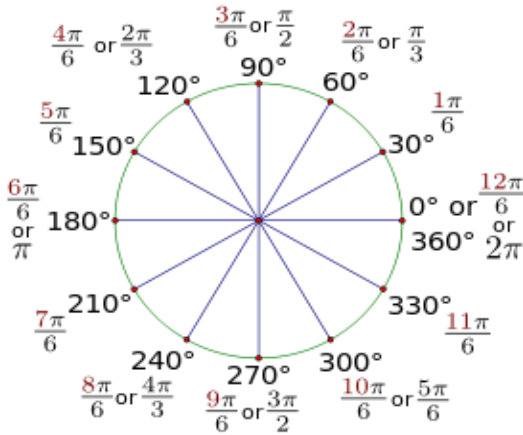
أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب ، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة :

-90°	130°
$-90^\circ + 360^\circ = 270^\circ$ القياس الموجب	$130^\circ + 360^\circ = 490^\circ$ القياس الموجب
$-90^\circ - 360^\circ = -450^\circ$ القياس السالب	$130^\circ - 360^\circ = -230^\circ$ القياس السالب

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

يمكن أن تقاس الزوايا بالدرجات أو بالراديان، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء لها قوس من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياسان من خلال المعادلتين:

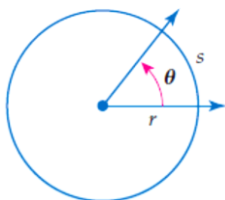
$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{أو} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$



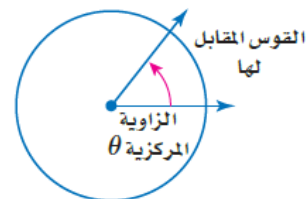
مثال حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

الزاوية المركزية وطول القوس

طول القوس = حاصل ضرب قياس الزاوية المقابلة له بالراديان في نصف القطر



إذا علم قياس الزاوية المركزية بالراديان من السهل إيجاد طول القوس



اختبر نفسك

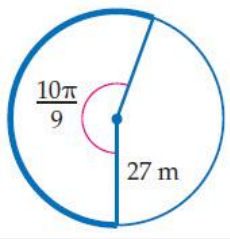
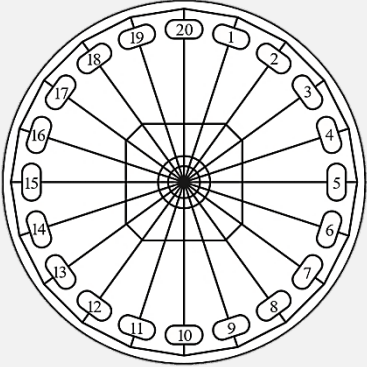
(4-2) الزوايا وقياساتها

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

30° تساوي								1
$\frac{\pi}{4} rad$	(D)	$\frac{\pi}{6} rad$	(C)	$\frac{\pi}{3} rad$	(B)	$\frac{\pi}{2} rad$	(A)	
$\frac{3\pi}{2} rad$ تساوي								2
270°	(D)	120°	(C)	240°	(B)	180°	(A)	
<p>طول القوس المحدد في الشكل المقابل لأقرب جزء من عشرة</p> 								3
94m	(D)	94.3m	(C)	94.2m	(B)	95m	(A)	
<p>الزاوية في الوضع القياسي المشتركة مع الزاوية 65° في ضلع الانتهاء هي:</p>								4
-812°	(D)	-200°	(C)	360°	(B)	425°	(A)	
<p>عجلة دوارة تحتوي على 20 مقعداً مرقمة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي . إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية ، فإن قياس الزاوية المركزية التي يكونها المقعدان 1 و 8 بالدرجات يساوي :</p> 								5
55°	(D)	102°	(C)	150°	(B)	126°	(A)	



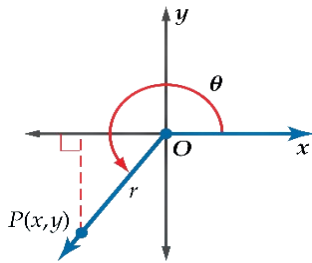
3 - 4 الدوال المثلثية للزوايا



المهارات السابقة	إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة .
المفردات	الزوايا الربعية : هي زوايا موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي علي أحد محوري الإحداثيات x, y . الزوايا المرجعية : هي الزاوية الحادة الموجبة باستخدام الاتجاه الموجب للمحورس باعتباره إطارها المرجعي .
المهارات الأساسية	أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية . أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية .

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاويا قياساتها تزيد على 90° أو تقل عن 0°

من خلال إحداثيات النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء لزاوية في وضع قياسي مقدارها θ



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ الوتر}$$

x المجاور y المقابل

فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يلي

$\sin \theta = \frac{y}{r}$	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$
$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$	$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$	$\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

مثال : إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2, -5)$

فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ ؟

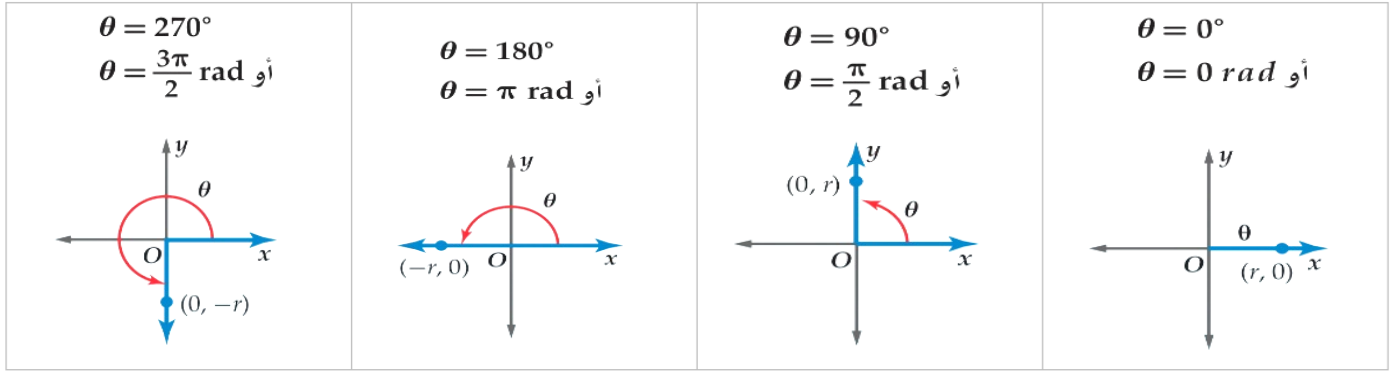
نوجد قيمة r : $x = -2, y = -5$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

ثم نعوض

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{29}} = \frac{-5\sqrt{29}}{29}$	$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}} = \frac{-2\sqrt{29}}{29}$	$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$
$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{29}}{5}$	$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{\sqrt{29}}{2}$	$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

الزوايا الربعية وهي ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$)

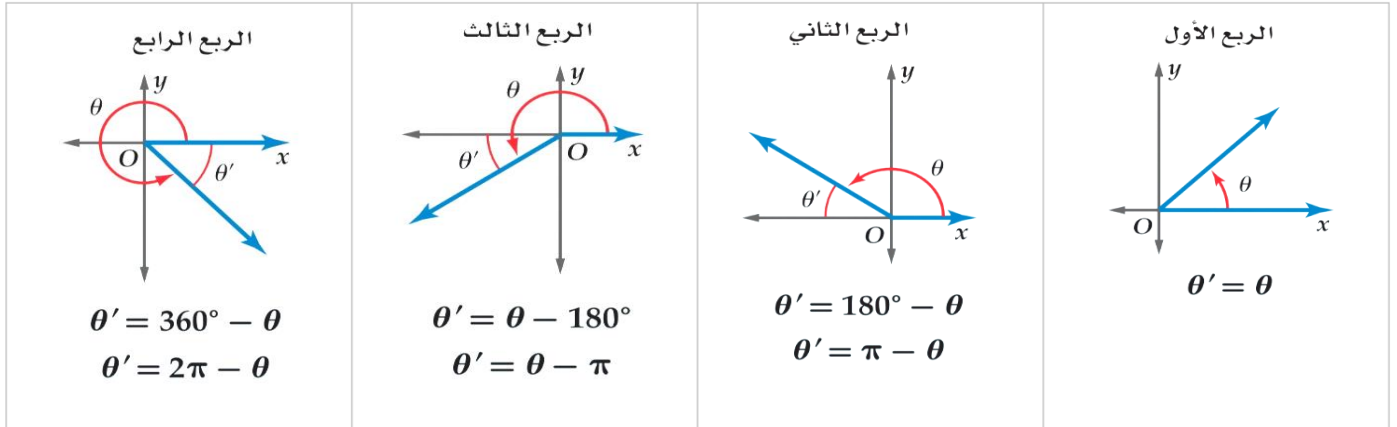


قيم الدوال المثلثية عند الزوايا الربعية دائما ثابتة كالجدول التالي

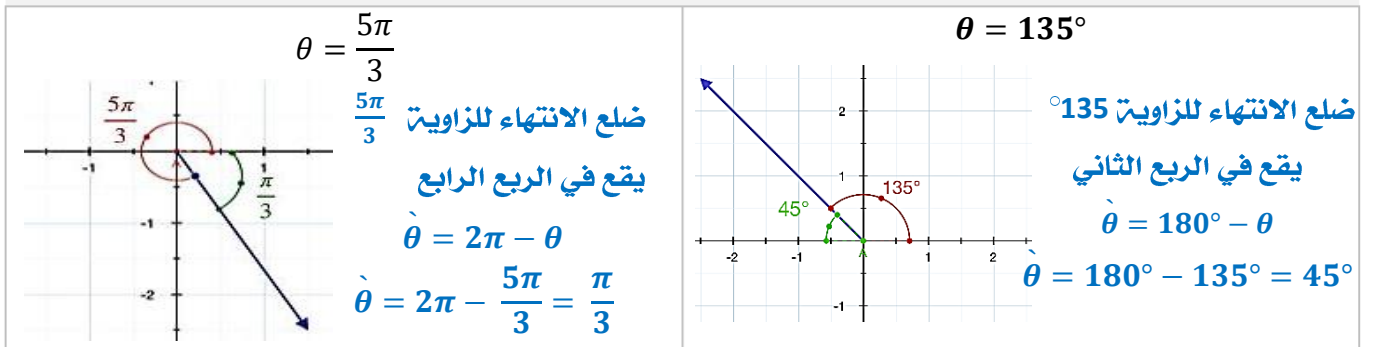
الدالة	90°	180°	270°	$360^\circ = 0^\circ$
$\sin \theta$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	غير معرف	0	غير معرف	0

الزوايا المرجعية

(إذا أعطيت زوايا أكبر من 90° وأصغر من 0° يتم إرجاعها لزوايا حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية المعطاة ومحور x)



مثال : ارسم كلا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها



إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية من خلال الزاوية المرجعية لها نتبع ثلاث خطوات :

- نوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية المعطاة
- نوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية المرجعية
- نحدد إشارة قيمة الدالة للزاوية المعطاة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء

قاعدة إشارات الدوال المثلثية في الأرباع

إذا كانت لدينا زاوية θ في الوضع القياسي،
فإننا نقول إن الزاوية θ تقع في الربع نفسه الذي يقع فيه ضلعها النهائي.
ولتحديد إشارة الدوال المثلثية لزاوية معلومة θ نضع في أذهاننا
أن إشارة دالتا جيب التمام تتبع إشارة محور x
وأن إشارة دالتا الجيب تتبع إشارة محور y والتوزيع التالي

في الربع الثاني، تكون
قيمة \sin موجبة

الربع الثاني	↑	الربع الأول
$\sin \theta, \csc \theta: +$		$\sin \theta, \csc \theta: +$
$\cos \theta, \sec \theta: -$		$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: -$		$\tan \theta, \cot \theta: +$
←		→
الربع الثالث	↓	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta: -$		$\sin \theta, \csc \theta: -$
$\cos \theta, \sec \theta: -$		$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: +$		$\tan \theta, \cot \theta: -$

في الربع الأول، تكون
قيم الكل موجبة

في الربع الثالث، تكون
قيمة \tan موجبة

في الربع الرابع، تكون
قيمة \cos موجبة.

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

الزوايا الشهيرة التي زواياها المرجعية ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$)

	الربع (1)	الربع (2)	الربع (3)	الربع (4)
30°	30°	151°	210°	330°
45°	45°	135°	225°	315°
60°	60°	120°	240°	300°

تتفق الزوايا الشهيرة مع زواياها المرجعية بقيم الدوال المثلثية وتختلف بالإشارات كالتالي

مثال : أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يلي:

$$\csc 120^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

الإشارة موجبة لأن الزاوية تقع في
الربع الثاني والدالة \sin في هذا
الربع موجبة

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الإشارة سالبة لأن الزاوية تقع في
الربع الثاني والدالة \cos في هذا
الربع سالبة

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

الإشارة سالبة لأن الزاوية تقع في
الربع الرابع والدالة \tan في هذا
الربع سالبة

اختبر نفسك

(4-3) الدوال المثلثية للزوايا

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

أي الدوال المثلثية قيمتها تساوي 0								1
$\cot 0^\circ$	(D)	$\cos \pi$	(C)	$\sin 180^\circ$	(B)	$\tan \frac{\pi}{2}$	(A)	
القيمة الدقيقة لـ $\sin 240^\circ$								2
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(D)	$-\frac{1}{2}$	(C)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(B)	$-\sqrt{3}$	(A)	
الزاوية المرجعية للزاوية 150° هي								3
-210°	(D)	45°	(C)	60°	(B)	30°	(A)	
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-4, -3)$ أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$								4
$-\frac{5}{4}$	(D)	$-\frac{3}{5}$	(C)	$-\frac{4}{5}$	(B)	$-\frac{5}{3}$	(A)	
أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$								5
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(D)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(B)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(A)	

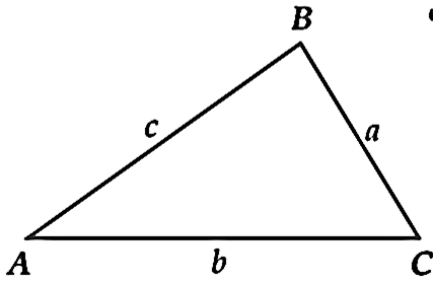


4 - 4 قانون الجيوب



المهارات السابقة	إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها .
المفردات	قانون الجيوب : هو قانون أو معادلتا تربط بين أطوال أضلاع المثلث بجيوب زواياه الداخلية طبقاً للعلاقة . حل المثلث : استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.
المهارات الأساسية	إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما . أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات .

إيجاد مساحة المثلث



$$k = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$$

$$k = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

مساحة المثلث k تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

تطبيق: أوجد مساحة المثلث ΔABC في كل من الحالات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة :

$$A = 34^\circ , b = 19.4 \text{ ft} , c = 8.6 \text{ ft}$$

$$k = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

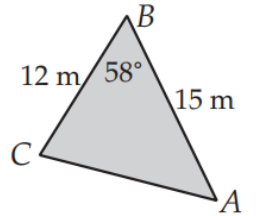
$$k = \frac{1}{2} (19.4)(8.6) \sin 34^\circ$$

$$k = 46.6 \text{ ft}^2$$

$$k = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2} (12)(15) \sin 58^\circ$$

$$k = 76.3 \text{ m}^2$$



قانون الجيوب لحل المثلثات

يستخدم قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:

- معرفة قياس زاويتين في المثلث وطول أي ضلع في إما زاوية - زاوية - ضلع حالة **AAS** ، أو زاوية - ضلع - زاوية حالة **ASA** وفي هذه الحالة يوجد للمثلث حل وحيد أي يوجد مثلث وحيد
- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما ضلع - ضلع - زاوية حالة **SSA** وفي هذه الحالة إن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حل أو له حل واحد، أو له حلان.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ينص قانون الجيب على أن النسبة بين طول أي ضلع وجيب الزاوية المقابلة له متساوية لجميع الأضلاع الثلاثة والزوايا المقابلة لها في أي مثلث .

تطبيقات

حل المثلث الذي فيه $B = 47^\circ, C = 112^\circ, b = 13$

من المعطيات زاويتين نوجد الزاوية الثالثة من مجموع زوايا المثلث: $A = 180^\circ - (112^\circ + 47^\circ) = 21^\circ$

باستخدام قانون الجيوب التعويض حل النسبة وإيجاد قيمة المتغير

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 21^\circ}{a} = \frac{\sin 47^\circ}{13}$$

$$a = \frac{13 \sin 21^\circ}{\sin 47^\circ} = 6.4$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

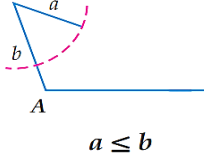
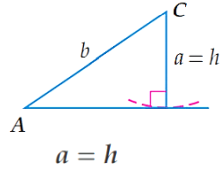
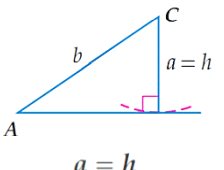
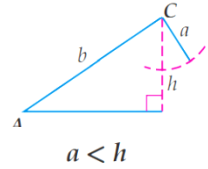
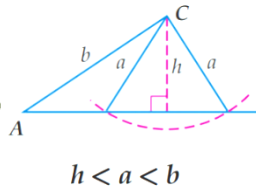
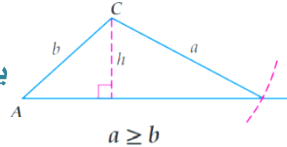
$$\frac{\sin 47^\circ}{13} = \frac{\sin 112^\circ}{c}$$

$$c = \frac{13 \sin 112^\circ}{\sin 47^\circ} = 16.5$$

المثلثات الممكنة في حالة SSA

إذا علم في مثلث $m\angle A, a, b$

فإن الحالات الممكنة تعتمد أولاً على قيمة الزاوية A

مثال	التوضيح بالرسم	الحالة
$A = 131^\circ, a = 15, b = 32$	لا يوجد حل  $a \leq b$	إذا كانت $\angle A$ قائمة أو منفرجة
$A = 95^\circ, a = 19, b = 12$	يوجد حل واحد  $a = h$	
$A = 30^\circ, a = 3, b = 6$ $h = 6 \sin 30^\circ = 3$	يوجد حل واحد  $a = h$	إذا كانت $\angle A$ حادة
$A = 60^\circ, a = 15, b = 24$ $h = 24 \sin 60^\circ \approx 20.8$	لا يوجد حل  $a < h$	
$A = 34^\circ, a = 8, b = 13$ $h = 13 \sin 34^\circ \approx 7.3$	يوجد حلين وتسمى هذه الحالة بالحالة المبهمة  $h < a < b$	
$A = 38^\circ, a = 21, b = 18$	يوجد حل واحد  $a \geq b$	

اختبر نفسك

قانون الجيوب (4-4)

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبية:

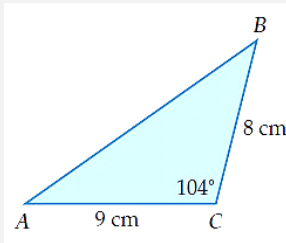
الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

مساحة ΔABC الذي فيه $A = 31^\circ, b = 18m, c = 22m$ مقربة لأقرب جزء من عشرة

1

- 339.4m² (D) 102m² (C) 169.7m² (B) 204m² (A)



مساحة المثلث الموضح بالشكل لأقرب جزء من عشرة

2

- 34m² (D) 69.9m² (C) 8.7m² (B) 34.9m² (A)

حدد المثلث الذي لا يوجد لها حل فيما يلي:

- $A = 30^\circ, a = 1, b = 4$ (C) $A = 35^\circ, a = 17, b = 20$ (A) 3

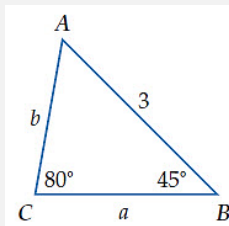
- $A = 105^\circ, a = 9, b = 6$ (D) $A = 26^\circ, a = 7, b = 6$ (B)

أي مثلث مما يأتي له حلان

4

- $A = 32^\circ, a = 16, b = 21$ (C) $A = 130^\circ, a = 19, b = 11$ (A)

- $A = 90^\circ, a = 25, b = 15$ (D) $A = 45^\circ, a = 4\sqrt{2}, b = 8$ (B)



من الشكل المقابل طول b لأقرب جزء من عشرة يكون

5

- 2.2 (D) 1.7 (C) 0.7 (B) 4.2 (A)



4 - 5 قانون جيب التمام



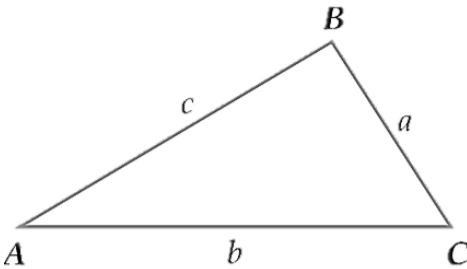
المهارات السابقة	حل المثلثات باستخدام قانون الجيوب.
المفردات	قانون جيب التمام : هو قانون ومبرهنة تربط ضلع أي مثلث بضلعيه الآخرين وجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.
المهارات الأساسية	أستعمل قانون جيب التمام لحل المثلثات . أختر طرقا مناسبة لحل المثلثات

استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث

- معرفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع) حالة SAS
- معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث (ضلع - ضلع - ضلع) حالة SSS

قانون جيب التمام

إذا كانت أضلاع ΔABC لتي أطوالها a, b, c : تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تطبيق : حدد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيب التمام) لحل المثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقربا أطوال الأضلاع أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$C = 54^\circ, a = 16, b = 20$$

الحل : القانون المناسب قانون جيب التمام لان حالة المثلث هي SAS

الخطوة الأولى: نستعمل قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 16^2 + 20^2 - 2(16)(20) \cos 54^\circ = 279.82$$

$$c = 16.7$$

الخطوة الثانية: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية A. (ويمكن في هذه الخطوة إيجاد قيمته

الزاوية باستخدام قانون الجيوب)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$16^2 = 20^2 + 16.7^2 - 2(20)(16.7) \cos A$$

$$256 = 400 + 278.9 - 668 \cos A$$

$$-422.9 = -668 \cos A$$

$$\cos A = \frac{-422.9}{-668} = 0.6331$$

$$A = \cos^{-1} 0.6331 \approx 51^\circ$$

الخطوة الثالثة: نوجد قياس الزاوية B : من مجموع زوايا المثلث : $B = 180^\circ - (51^\circ + 54^\circ)$

$$B = 75^\circ$$

اختبر نفسك

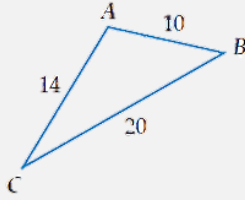
(4-5) قانون جيب التمام

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:



من الشكل قياس زاوية A لأقرب درجة

1

101°

Ⓓ

120°

Ⓒ

22°

Ⓑ

112°

Ⓐ

إذا كان ΔABC $a=...$ ، $A=35^\circ$ ، $b=2$ ، $c=6$ فإن ...

2

4.5

Ⓓ

5.5

Ⓒ

7.7

Ⓑ

20.3

Ⓐ

مخيم للكشافة له بوابتان A ، B بينهما 80 m ، يقع مكتب مدير المخيم عند النقطة O على بعد 95m من A وعلى بعد 115 m من B . ما قياس الزاوية AOB ؟

3

20.33°

Ⓓ

52.11°

Ⓒ

43.5°

Ⓑ

35.52°

Ⓐ

ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة خطأ أمام العبارة الخاطئة:

إذا كان ABC مثلث فيه: $cosA = 0.4$ ، $b = 2.5cm$ ، $c = 2cm$ فإن المثلث ABC مثلث متطابق الضلعين

1

في المثلث ABC حيث $a = 13$ ، $A = 41^\circ$ ، $B = 64^\circ$ فإن القانون الذي يتعين البدء باستخدامه لحل المثلث هو قانون جيب التمام

2

4 - 6 الدوال الدائرية



المهارات السابقة	إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية .
المهارات الأساسية	أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة . أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية .
المفردات	دائرة الوحدة : أو الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها يساوي الواحد الدالة الدائرية : وتسمى أيضاً بالدوال المثلثية وهي مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه. الدالة الدورية : هي دالة تكرر قيمتها بعد فترة محددة منتظمة متتالية . الدورة : النمط الواحد الكامل في الدالة الدورية طول الدورة : المسافة الأفقية في الدورة

	<p>في دائرة الوحدة</p> <p>المركز: (0,0)</p> <p>نصف القطر: $r = 1$</p> <p>الزاوية: θ في وضع قياسي</p> <p>نقطة $P(x, y)$ تقع على تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة</p> <p>$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$</p>
--	---

تطبيقات

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ فأوجد كلا من } \sin \theta, \cos \theta$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

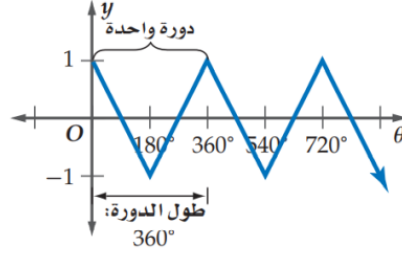
ملاحظات هامة: من خلال المعطى $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ يمكن تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء وهو الثالث

لأن إشارات احداثيات كل من x, y سالبة ويمكن إيجاد باقي الدوال باستخدام دوال المقلوب أو النسب المثلثية .

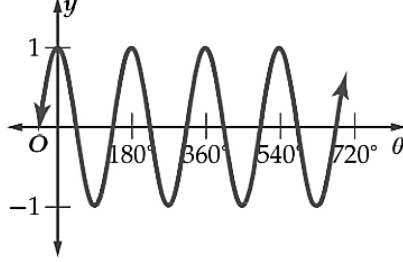
الدوال الدورية

θ	y
0°	1
180°	-1
360°	1
540°	-1
720°	1

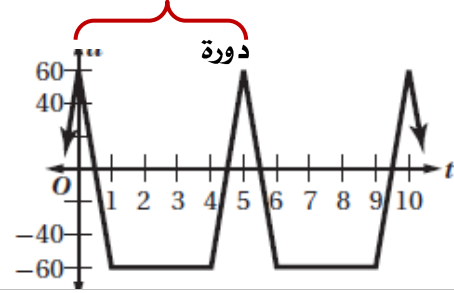
تتكرر الدورة كل 360°



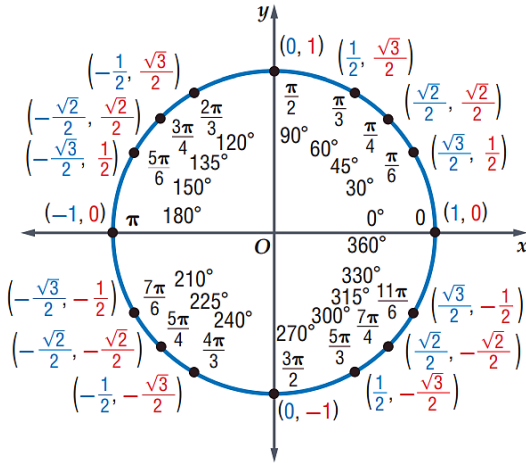
دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 180°



دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 5



يبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من $\sin \theta$, $\cos \theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة



$$\cos \theta = x \Rightarrow \sec \theta = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$\sin \theta = y \Rightarrow \csc \theta = \frac{1}{y}, y \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

ملاحظات هامة تتكرر دورة كل من دالتي الجيب وجيب التمام كل 360° .

وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما 2π أو 360°

لذا فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل 360° . فتكون النتيجة التالية صحيحة دائما

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$$

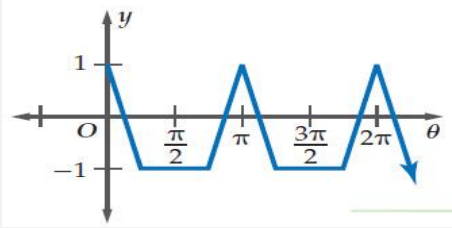
$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

تطبيق أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي

$$\begin{aligned} & \cos 7\pi \\ &= \cos(\pi + 3(2\pi)) \\ &= \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin 585^\circ \\ &= \sin(225^\circ + 360^\circ) \\ &= \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

اختر الإجابة الصحيحة:



طول الدورة للدالة الممثلة بالشكل يكون

1

2π

Ⓓ

$\frac{3\pi}{2}$

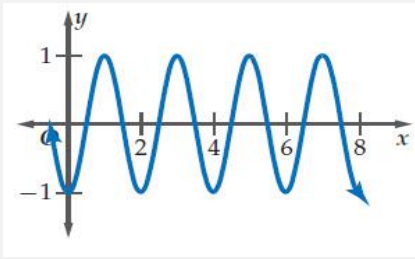
Ⓒ

π

Ⓑ

$\frac{\pi}{2}$

Ⓐ



طول الدورة للدالة الممثلة بالشكل هي:

2

6

Ⓓ

3

Ⓒ

4

Ⓑ

2

Ⓐ

$\sin 840^\circ =$

3

$-\frac{1}{2}$

Ⓓ

$\frac{1}{2}$

Ⓒ

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⓑ

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⓐ

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{20}{29}, -\frac{21}{29}\right)$ فأوجد $\sec \theta$

4

$\frac{29}{20}$

Ⓓ

$\frac{20}{29}$

Ⓒ

$-\frac{29}{21}$

Ⓑ

$-\frac{21}{29}$

Ⓐ

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

5

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓓ

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓒ

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⓑ

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ⓐ

7 - 4 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



المهارات السابقة	الدوال الدورية
المهارات الأساسية	أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل وأمثلها بيانياً . أصف دوال مثلثية أخرى وأمثلها بيانياً .
المفردات	السعة : لمنحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة. التردد : هو عدد الدورات في وحدة الزمن. وهو وصف للموجات والحركة الدورية

التمثيل البياني وخصائص دالتي الجيب وجيب التمام

الدالة الأم	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	
المدى	$\{y -1 \leq y \leq 1\}$	
السعة	1	
طول الدائرة	360°	

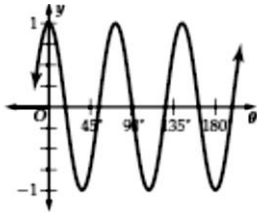
الصورة العامة لتحويلات التمثيل البياني للدوال المثلثية

$y = a \sin b\theta$ نقاط تقاطع الدالة محور θ : $(0, 0)$ و $(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$ و $(\frac{360^\circ}{b}, 0)$	$y = a \cos b\theta$ نقاط تقاطع الدالة محور θ : $(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$ و $(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$
$ a = \text{السعة}$ ، $\frac{360^\circ}{ b } = \text{وطول الدورة}$	

تطبيقات : أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

$$\text{السعة} = |1| = 1$$

$$\text{طول الدورة} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$



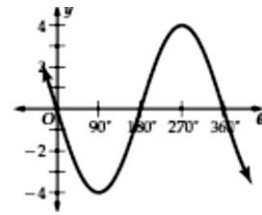
نقاط تقاطع الدالة محور θ :

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{5}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{5}, 0\right)$$

$$(54^\circ, 0) \text{ و } (18^\circ, 0)$$

$$\text{السعة} = |-4| = 4$$

$$\text{طول الدورة} = \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$$



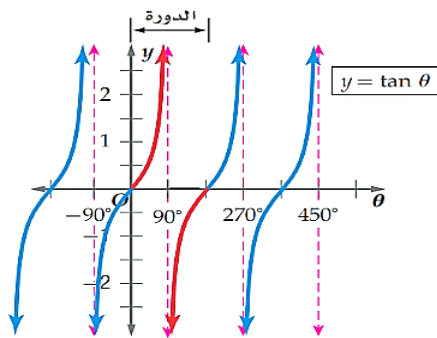
نقاط تقاطع الدالة محور θ :

$$(0, 0) \text{ و } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{1}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{360^\circ}{1}, 0\right)$$

$$(0, 0) \text{ و } (180^\circ, 0) \text{ و } (360^\circ, 0)$$

تستخدم الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال التردد، التردد = مقلوب طول الدورة

دالة الظل



$$y = \tan \theta$$

$$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

أي غير معرفه عند 90° و 270°

مجموعة الأعداد الحقيقية

غير معرفه

$$180^\circ$$

الدالة الأم

المجال

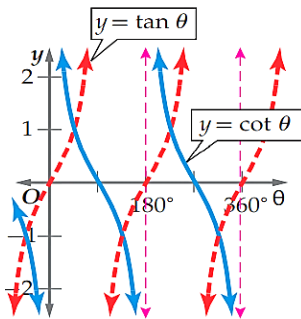
المدى

السعة

طول الدورة

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى

$$y = \cot \theta$$

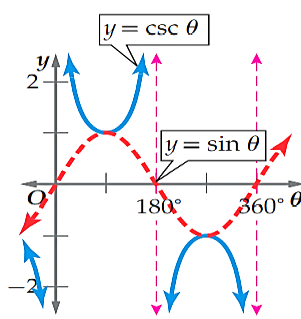


$$\{\theta \mid \theta \neq 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد الحقيقية

$$180^\circ$$

$$y = \sec \theta$$

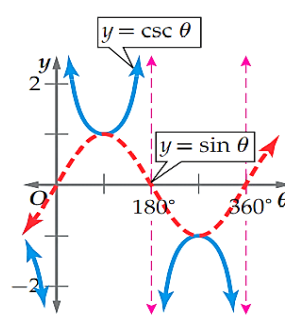


$$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

غير معرفه

$$360^\circ$$

$$y = \csc \theta$$



$$\{\theta \mid \theta \neq 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

الدالة الأم

التمثيل
البياني

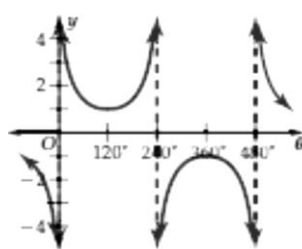
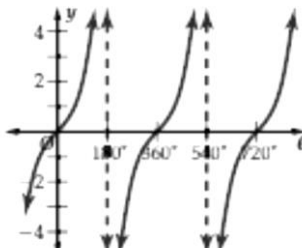
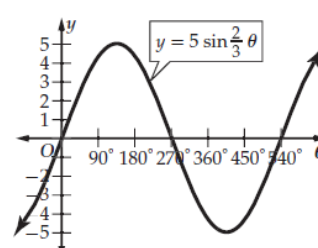
المجال

المدى

السعة

طول الدورة

أوجد السعة (إذا كانت معرفة)، وطول الدورة لكل دالة مما يأتي ومثلها بيانياً :

التمثيل البياني	طول الدورة	السعة	الدالة
	$\frac{360^\circ}{ b } = \frac{360^\circ}{\frac{3}{4}} = 360^\circ \left(\frac{4}{3}\right) = 480^\circ$	غير معرفة	$y = \csc \frac{3}{4} \theta$
	$\frac{180^\circ}{ b } = \frac{180^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ$	غير معرفة	$y = 2 \tan \frac{1}{2} \theta$
	$\frac{360^\circ}{ b } = \frac{360^\circ}{\frac{2}{3}} = 360^\circ \left(\frac{3}{2}\right) = 540^\circ$	$ 5 = 5$	$y = 5 \sin \frac{2}{3} \theta$

(4-7) تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 طول الدورة للدالة $y = \csc 2\theta$ يكون

90°

Ⓓ

180°

Ⓒ

270°

Ⓑ

360°

Ⓐ

2 في الدالة المثلثية $y = 4\sin 3\theta$ ، من تقاطع الدالة مع المحور x تساوي

(45°, 0)

Ⓓ

(30°, 0)

Ⓒ

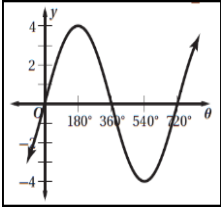
-(60°, 0)

Ⓑ

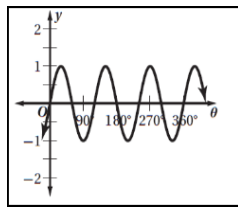
(180°, 0°)

Ⓐ

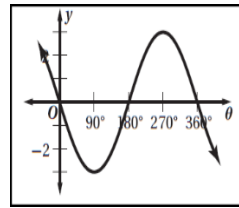
3 التمثيل البياني للدالة المثلثية $y = \sin 3\theta$



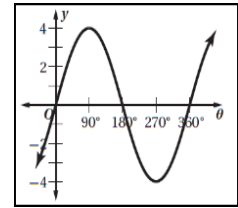
Ⓓ



Ⓒ

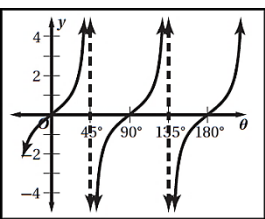


Ⓑ

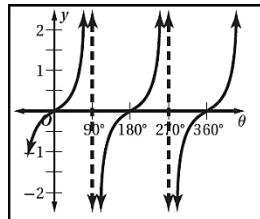


Ⓐ

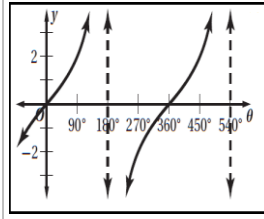
4 التمثيل الصحيح للدالة $y = \tan 2\theta$



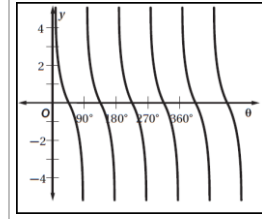
Ⓓ



Ⓒ



Ⓑ



Ⓐ

5 طول الدورة في الدالة $y = 2 \tan \frac{2}{3}\theta$

120°

Ⓓ

240°

Ⓒ

270°

Ⓑ

540°

Ⓐ

8 - 4 الدوال المثلثية العكسية



تمثيل الدوال المثلثية العكسية .	المهارات السابقة
أجد قيم الدوال المثلثية العكسية . أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية .	المهارات الأساسية
القيم الأساسية : الدوال المثلثية غير متباينة فيكون معكوس الدوال غير موجود فيتم تحديد مجال الدوال المثلثية العكسية إلى قيم أساسية محددة . دالة الجيب العكسية - دالة جيب التمام العكسية - دالة الظل العكسية المعادلة المثلثية : هي معادلات تحتوي على دوال مثلثية بزوايا مجهولة القياس	المفردات

معكوس الدالة المثلثية :

الدالة العكسية	دالة الجيب العكسية	دالة جيب التمام العكسية	دالة الظل العكسية
الرمز	$y = \sin^{-1} x$ $y = \text{Arc sin } x$	$y = \cos^{-1} x$ $y = \text{Arc cos } x$	$y = \tan^{-1} x$ $y = \text{Arc tan } x$
المجال	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$	\mathbb{R}
المدى	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$	$0 \leq y \leq \pi$ $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$
الرسم البياني			

الفرق بين $y = \cos^{-1} x$ و $y = \text{Cos}^{-1} x$ عندما $x = \frac{1}{2}$

$y = \text{Cos}^{-1} x$ $y = 60^\circ$ لذلك تسمى $y = \text{Cos}^{-1} x$ دالة	$y = \cos^{-1} x$ $y = 300^\circ$ و 60° وكل زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين في ضلع الانتهاء لذلك تسمى $y = \cos^{-1} x$ علاقة
---	--

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية بثلاث طرق

- استعمال دائرة الوحدة
- استعمال الزاوية المرجعية
- استعمال الآلة الحاسبة

تطبيقات

أوجد قيمة ما يلي بالدرجات والراديان :

$\text{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$ $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\text{Cos}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\text{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$ $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ $\theta = -60^\circ$ $= -\frac{\pi}{3}$
---	---	---

أوجد قيمة ما يلي ، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة

$\sin \left[\text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ $\sin \left[\text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ دالتا وعكسها فتكون الإجابة مباشرة وبدون آلة حاسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \left[\text{Tan}^{-1} \frac{3}{5} \right]$ 0.86 باستخدام الآلة الحاسبة	$\tan \left[\text{Sin}^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$ 0.58 باستخدام الآلة الحاسبة
--	---	---

حل المعادلات التالية (حل المعادلات المثلثية مشابه تماماً لما سبق في الدوال العكسية):

$\text{Sin} \theta = 2.5$ ليس لها حل لأن مجال الدالة $\text{Sin}^{-1} x$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\text{Cos} \theta = -0.25$ $\theta = \text{Cos}^{-1}(-0.25)$ $= 104.48^\circ$	$\text{Tan} \theta = 3.8$ $\theta = \text{Tan}^{-1}(3.8)$ $= 75.26^\circ$
---	--	---

اختبر نفسك

(4-8) الدوال المثلثية العكسية

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

يكون $y = \sin^{-1} x$ مجال الدالة							1
$\mathbb{R} - \{1\}$	(D)	\mathbb{R}	(C)	$-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$	(B)	$-1 \leq x \leq 1$	(A)
$\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على الفترة $[0, \pi]$							2
225°	(D)	$45^\circ, 135^\circ$	(C)	135°	(B)	45°	(A)
قيمة $\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{8}\right)$ الى اقرب جزء من مئة							3
0.36	(D)	0.35	(C)	0.4	(B)	0.94	(A)
إذا كانت $\sin \theta = 0.422$ فان قياس الزاوية θ بالدرجات							4
65°	(D)	48	(C)	42°	(B)	25°	(A)
إذا كانت $\tan \theta = 1.8$ فان قياس الزاوية θ بالدرجات							5
لا يوجد حل	(D)	60.9°	(C)	29.1°	(B)	0.03°	(A)

ملحق الإجابات
للفصل الأول
العلاقات والدوال

ملحق الحل

التهيئة

الوحدة الأولى:

العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 حل المعادلتين $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}$ في أبسط صورة يساوي:

- (A) $x = \frac{3}{5}$ (B) $x = \frac{5}{3}$ (C) $x = \frac{5}{12}$ (D) $x = 2$

2 حل التناسب $\frac{2}{7} = \frac{m}{5}$ في أبسط صورة

- (A) $m = \frac{7}{10}$ (B) $m = \frac{10}{7}$ (C) $m = \frac{35}{2}$ (D) $m = \frac{2}{35}$

3 $\frac{1}{8}$ هو ناتج تبسيط العبارة

- (A) $\frac{1}{4} - \frac{3}{8}$ (B) $\frac{3}{8} - \frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$ (D) $\frac{2}{9} - \frac{7}{15}$

4 18 هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد:

- (A) 9، 6، 2 (B) 1، 6، 3 (C) 12، 6، 3 (D) 9، 4، 2

5 $\frac{1}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3} =$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{-2}{8}$ (D) $\frac{11}{15}$

6 تستخدم ليلى عند خبز الكيك $\frac{2}{3}$ كوب من الحليب وتستخدم عند خبز الخبز $\frac{1}{2}$ كوب من الحليب. فكم كوب من الحليب تحتاج ليلى لعمل الطبقين؟

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{6}$



ملحق الحل

(1-1) ضرب العبارات النسبية

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

تبسيط العبارة النسبية $\frac{24pn}{18p^2}$ هو:								1
3,-3	(D)	$\frac{4n}{3p}$	(C)	$\frac{4pn}{3}$	(B)	$\frac{3p}{4n}$	(A)	
تبسيط العبارة النسبية $\frac{c-5}{c^2-c-20}$ هو:								2
$\frac{-1}{c+4}$	(D)	$\frac{1}{c+4}$	(C)	$\frac{5-c}{c+4}$	(B)	$\frac{5-c}{c-4}$	(A)	
تبسيط العبارة النسبية $\frac{24x^3y^5}{ab} \cdot \frac{ab^2}{12x^2y^2}$								3
$2x^5y^7b^3$	(D)	$2xy^3b$	(C)	$\frac{xy^3b}{2}$	(B)	$\frac{2xy^2}{b}$	(A)	
إذا كانت $r \neq \pm 2$ ، فأی مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$								4
$x^2 + xy + y^2$	(D)	$\frac{r+2}{r-4}$	(C)	$\frac{r+4}{r-2}$	(B)	$\frac{r-2}{r+4}$	(A)	
قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-5x-14}{x^2+7x+10}$ غير معرفّة هي								5
-5, -2	(D)	-2	(C)	0, 2, 5	(B)	-5, 2	(A)	
ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفّة؟								6
-7, 4	(D)	-7, 4, 7	(C)	4, 7	(B)	7, -4	(A)	



ملحق الحل

(1-2) جمع العبارات النسبية وطرحها

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 LCM لكثيرات الحدود الآتية: $3z + 12$, $6z + 24$, يساوي:

$z + 4$

(D)

$6(z + 4)$

(C)

$3(z + 4)$

(B)

$18(z + 4)$

(A)

2 LCM لكثيرات الحدود الآتية: $12a^2$, $15b^3$, $20ab^2$, يساوي:

$60a^3b^3$

(D)

$120a^2b^5$

(C)

$60a^2b^3$

(B)

$120a^2b^3$

(A)

3 ناتج جمع العبارتين النسبيتين $\frac{2x}{x^2+9x+18} + \frac{5}{x+6}$ هو

$\frac{7x}{(x+6)}$

(D)

$\frac{x+15}{(x+3)}$

(C)

$\frac{7x+15}{(x+6)(x+3)}$

(B)

$\frac{7x-15}{(x+6)(x+3)}$

(A)

4 ناتج طرح العبارتين النسبيتين $\frac{4}{3x+6} - \frac{x-2}{x^2-4}$

$\frac{1}{3(x+2)}$

(D)

$\frac{-1}{2(x+2)}$

(C)

$\frac{1}{2(x-2)}$

(B)

$\frac{-1}{3(x+2)}$

(A)

5 تبسيط العبارة $\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{\frac{x}{7} - \frac{y}{4}}$ هو:

$\frac{2y+3x}{7y-4x}$

(D)

$\frac{2x+3y}{7x-4y}$

(C)

$\frac{2x+3y}{7y-4x}$

(B)

$\frac{2y+3x}{7x-4y}$

(A)



ملحق الحل

الوحدة الأولى:

العلاقات والدوال النسبية

(1-3) تمثيل دوال المقلوب بيانياً

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

شكل التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأم) لدوال المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ هو:

1

قطع زائد

Ⓓ

دائرة

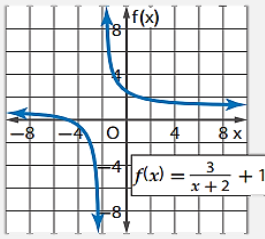
Ⓒ

قطع ناقص

Ⓑ

قطع مكافئ

Ⓐ



خط التقارب الأفقي للدالة الموضحة بالرسم المجاور:

2

$x = -2$

Ⓓ

$x = 2$

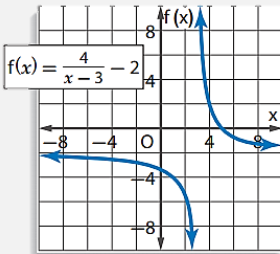
Ⓒ

$y = 1$

Ⓑ

$y = -1$

Ⓐ



خط التقارب الرأسي للدالة الموضحة بالرسم المجاور:

3

$y = 2$

Ⓓ

$y = -2$

Ⓒ

$x = 3$

Ⓑ

$x = -3$

Ⓐ

مدى الدالة $f(x) = \frac{7}{x+4} + 3$ هو:

4

$R - \{-4\}$

Ⓓ

$R - \{-3\}$

Ⓒ

$R - \{4\}$

Ⓑ

$R - \{3\}$

Ⓐ

مجال الدالة $f(x) = \frac{5}{4x-8}$ هو:

5

جميع الأعداد

Ⓓ

جميع الأعداد

Ⓒ

جميع الأعداد

Ⓑ

جميع الأعداد

Ⓐ

الحقيقية ما عدا 2

الحقيقية ما عدا 1

الحقيقية ما عدا
الصفري

الحقيقية



ملحق الحل

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

(1-4) تمثيل الدوال النسبية بيانياً

الشعبية :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ؟

- (A) $x=2$ (B) $x=-2$ (C) $y=1$ (D) $y=2$

2 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ؟

- (A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي

3 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ؟

- (A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي

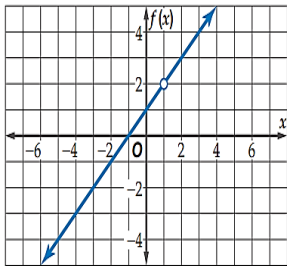
4 ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{4x}{x^2-16}$ ؟

- (A) $x=4$ (B) $x=-4$ (C) $x=4, x=-4$ (D) $x=16, x=-16$

5 ما معادلة خط التقارب الأفقي للدالة النسبية $f(x) = \frac{4x}{x^2-16}$ ؟

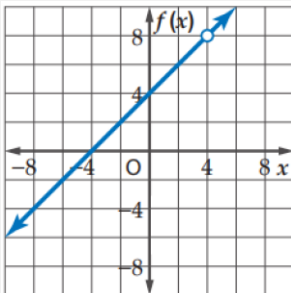
- (A) $y=0$ (B) $y=1$ (C) $y=2$ (D) لا يوجد خط تقارب أفقي

6 نقطة الانفصال الموضحة في الشكل المجاور عند:



- (A) $x=1$ (B) $x=4$ (C) $x=2$ (D) $x=0$

7 الشكل المجاور هو التمثيل للدالة:



- (A) $\frac{x^2-64}{x+8}$ (B) $\frac{x^2-64}{x-8}$ (C) $\frac{x^2-16}{x+4}$ (D) $\frac{x^2-16}{x-4}$



ملحق الحل

(1-5) دوال التغير

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكان $k \neq 0$ فإن:

1

$2yx = k$ (D)

$y = k - x$ (C)

$xy = k$ (B)

$y = kx$ (A)

ما نوع التغير الذي تمثله المعادلة $z = 30x$ ؟

2

مركب.

(D)

مشترك.

(C)

عكسي.

(B)

طردي.

(A)

إذا كانت y تتغير تغيراً طردياً مع x ، وكانت $y = 4$ عندما $x = -2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 30$

3

$\frac{4}{15}$ (D)

-60 (C)

60 (B)

$-\frac{4}{15}$ (A)

إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y = 24$ عندما $x = 2$ و $z = 3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 1$ و $z = 5$

4

4 (D)

10 (C)

20 (B)

5 (A)

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكان $k \neq 0$ فإن:

5

$2y + x = k$ (D)

$y = k - x$ (C)

$xy = k$ (B)

$y = kx$ (A)

ما نوع التغير الذي تمثله المعادلة $ac = 5$ ؟

6

مركب.

(D)

مشترك.

(C)

عكسي.

(B)

طردي.

(A)



ملحق الحل

(1-6) حل المعادلات والمتباينات النسبية

الوحدة الأولى:
العلاقات والدوال النسبية

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

حل المعادلة $\frac{7}{x} + \frac{7}{12} = \frac{5}{6}$ هو:								1
\emptyset	(D)	14	(C)	-28	(B)	28	(A)	
إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$ ، فما قيمة a ؟								2
2	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	$\frac{1}{8}$	(B)	$-\frac{1}{8}$	(A)	
حل المعادلة $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$ هو:								3
$\frac{1}{2}$	(D)	$\frac{1}{4}$	(C)	$\frac{1}{5}$	(B)	$\frac{1}{10}$	(A)	
حل المعادلة $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$ هو:								4
1	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	$-\frac{1}{2}$	(B)	-1	(A)	
مجموعة حل المتباينة $\frac{5}{x} + \frac{7}{x} < 6$ هي:								5
$x < 0$	(D)	$x < 0, x > 2$	(C)	$0 < x < 2$	(B)	$x < 2$	(A)	
مجموعة حل المتباينة $\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$ هي:								6
$0 < x < 1$	(D)	$x < 0, x > 1$	(C)	$x < 1$	(B)	$x < 0$	(A)	



ملحق الإجابات
للفصل الثاني
المتتابعات والمتسلسلات

ملحق الحل

التهيئة

الوحدة الثانية:
المتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

حل المعادلة $6x - 13 = 23$								1
6	Ⓓ	5	Ⓒ	$\frac{5}{3}$	Ⓑ	-12	Ⓐ	
الدالة التي مجالها $\{2, 4, 6, 8\}$ هي								2
$\{(1,2),(2,4), (3,6),(4,8)\}$	Ⓓ	$\{(2,1),(4,2), (6,3),(8,4)\}$	Ⓒ	$\{(6,2),(12,4), (18,6),(24,8)\}$	Ⓑ	$\{(2,4),(4,16), (3,9),(5,25)\}$	Ⓐ	
أي معادلة من المعادلات التالية أحد حلولها: $x = -2$								3
$2x^2 + 4 = 12$	Ⓓ	$x^2 - 4 = 1$	Ⓒ	$x^2 - 4 = 12$	Ⓑ	$2x^2 - 4 = -12$	Ⓐ	
تريد مها أن تزرع حديقة منزلها فاشترت 60 شتلة ورد ، زرعت في أحد جانبيها 15 شتلة وفي الجزء الثاني قررت زرع كل 9 شتلات متبقية في صف واحد فإن عدد الصفوف التي ستزرعها مها يساوي:								4
45	Ⓓ	9	Ⓒ	5	Ⓑ	4	Ⓐ	
قيمة العبارة الرياضية $2zy^x$ ، في أبسط صورة عندما $x = 3, y = \frac{1}{2}, z = -5$ تساوي:								5
$-\frac{4}{5}$	Ⓓ	$\frac{4}{5}$	Ⓒ	$-\frac{5}{4}$	Ⓑ	$\frac{5}{4}$	Ⓐ	



ملحق الحل

(2-1) المتتابعات بوصفها دوال

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية 10 ، 13، 16 ،

- (A) 19, 22, 25, 28 (B) 17, 18, 19, 20 (C) 19, 21, 24, 27 (D) 20, 25, 30, 35

2 الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية 9 ، 6 ، 4،.....

- (A) $\frac{8}{3}, \frac{16}{9}$ (B) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ (C) 2, 0 (D) 8, 16

3 يتكون مدرج من عدة صفوف، إذا كان عدد مقاعد الصف الأول 20 مقعداً، وكان كل صف يزيد على السابق له بأربعة مقاعد، ففي أي صف يكون عدد المقاعد 48 ؟

- (A) الصف الرابع (B) الصف الثالث (C) الصف السادس (D) الصف السادس

4 الحد السابع للمتتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 3, d = 5$

- (A) 30 (B) 31 (C) 33 (D) 38

5 المتتابعة، 3، 12، 27، 48 هي

- (A) حسابية وأساسها 15 (B) حسابية وأساسها 9 (C) حسابية وأساسها 4 (D) غير ذلك



ملحق الحل

(2-2) المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبته :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

متتابعة حسابية فيها $a_1 = 15, d = 8$ فإن a_{20} تساوي

1

167

Ⓓ

159

Ⓒ

175

Ⓑ

152

Ⓐ

الحد النوني للمتتابعة الحسابية $12, 3, -6, \dots$

2

$-3n + 15$

Ⓓ

$-9n - 21$

Ⓒ

$9n + 21$

Ⓑ

$-9n + 21$

Ⓐ

$$\sum_{k=4}^{18} (6k - 1) =$$

3

1008

Ⓓ

975

Ⓒ

910

Ⓑ

846

Ⓐ

قيمة x التي تحقق ان

$$\sum_{k=5}^x (8k + 2) = 1032$$

4

16

Ⓓ

15

Ⓒ

14

Ⓑ

13

Ⓐ

الوسطين الحسابيين بين العددين 8 , 17 هما

5

12 , 13

Ⓓ

9 , 13

Ⓒ

11 , 14

Ⓑ

10 , 12

Ⓐ



ملحق الحل

(2-3) المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

الحد النوني للمتتابعة الهندسية $2, 16, 128, \dots$ هو

1

$2(8)^n$ (D) $(16)^{n-1}$ (C) $2(8)^{n-1}$ (B) $(8)^{n-1}$ (A)

الحد العاشر في المتتابعة الهندسية $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$ هو

2

128 (D) 256 (C) 512 (B) 1024 (A)

الوسط الهندسي بين العددين 4 , 16

3

± 8 (D) ± 10 (C) -10 (B) 10 (A)

الوسطين الهندسيين بين العددين 9 , $\frac{1}{3}$ هما

4

$-1, -3$ (D) 2 , 4 (C) 1 , 3 (B) 3 , 6 (A)

$$\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1} =$$

5

3050 (D) 1023 (C) 1533 (B) 3069 (A)



ملحق الحل

(2-4) المتسلسلات الهندسية اللانهائية

الوحدة الثانية:
المتابعات والمتسلسلات

الشعبة :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية $8 + 4 + 2 + \dots$

ليس لها مجموع	(D)	$\frac{32}{3}$	(C)	8	(B)	16	(A)
---------------	-----	----------------	-----	---	-----	----	-----

كتابة الكسر العشري الدوري $0.\overline{534}$ على صورة كسر اعتيادي بأبسط صورة هي :

$\frac{178}{33}$	(D)	$\frac{178}{333}$	(C)	$\frac{534}{1000}$	(B)	$\frac{534}{333}$	(A)
------------------	-----	-------------------	-----	--------------------	-----	-------------------	-----

المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\dots + \frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}$

تباعية و $r = 9$	(D)	تباعية و $r = 3$	(C)	تقاربة و $r = \frac{3}{4}$	(B)	تقاربة و $r = \frac{1}{3}$	(A)
------------------	-----	------------------	-----	----------------------------	-----	----------------------------	-----

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \dots$$

غير موجودة	(D)	8	(C)	$\frac{25}{2}$	(B)	$\frac{25}{3}$	(A)
------------	-----	---	-----	----------------	-----	----------------	-----

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي

$6\frac{1}{3}$	(D)	$\frac{2}{8}$	(C)	$\frac{63}{100}$	(B)	$\frac{7}{11}$	(A)
----------------	-----	---------------	-----	------------------	-----	----------------	-----



ملحق الحل

(2-5) نظرية ذات الحدين

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبته :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

الحد الخامس في مفعوك $(a + b)^7$ هو								1
$35a^5b^2$	Ⓓ	$21a^2b^5$	Ⓒ	$35a^3b^4$	Ⓑ	$35a^4b^3$	Ⓐ	
الحد الخامس في مفعوك $(5a - 4b)^4$ هو								2
$256b^4$	Ⓓ	$1280ab^3$	Ⓒ	$2000a^3$	Ⓑ	$2400a^2b^2$	Ⓐ	
مفعوك $(x + 2y)^3$								3
$x^3 + 8y^3$	Ⓑ	$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$	Ⓐ	$x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + 8y^3$	Ⓓ	$x^2 + 4xy + 4y^2$	Ⓒ	
مفعوك $(1 + x)^4$								4
$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 4x^4$	Ⓑ	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	Ⓐ	$1 + x^4$	Ⓓ	$4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$	Ⓒ	
معاملات الحدود الناتجة من مفعوك $(x + y)^4$								5
$1,4,6,4,1$	Ⓓ	$1,4,4,1$	Ⓒ	$1,3,3,1$	Ⓑ	$1,5,10,5,1$	Ⓐ	



ملحق الحل

(2-6) البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي

الوحدة الثانية:
المتتابعات والمتسلسلات

الشعبة :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1	باستخدام البرهان بالاستقراء الرياضي فإن الفرضية التي تستخدم لإثبات صحة العبارة : $6^n - 1$ تقبل القسمة على 5 . عندما $n = k + 1$ هي :	(A) $6^k - 1 = r$	(B) $6^k - 1 = 5r$	(C) $6^k - 1 = 5$	(D) $6^{k+1} = 5r$
2	في العبارة الرياضية، $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ ووفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي ، الحد المضاف لإثبات صحة العبارة عندما $n = k + 1$ يساوي :	(A) $4k + 1$	(B) $4k + 3$	(C) $4k + 4$	(D) $4k - 1$
3	من الأمثلة المضادة التي تثبت خطأ العبارة $5 + n^2 + 1$ ، تقبل القسمة على 3 ، حيث n عدد طبيعي هي	(A) $n = 2$	(B) $n = 3$	(C) $n = 5$	(D) $n = 6$
4	العبارة الرياضية الذي يكون فيها $n = 2$ ليس مثلاً مضاداً لها هي:	(A) $7n - 5$ عدد أولي	(B) $18^n - 1$ من مضاعفات العدد 17	(C) $1 + 4 + \dots + (3n - 2) = n^3 - n^2 + 1$	(D) $n^2 + n + 1$ عدد زوجي
5	ذكر خالد أنه يوجد أربعة أزواج فقط من الأعداد الأولية الفردية المتتابطة وهي (17, 19), (11, 13), (5, 7), (3, 5) فإن المثال المضاد الذي يثبت خطأ ما ذكره هو:	(A) (21, 23)	(B) (25, 27)	(C) (29, 31)	(D) (37, 33)



ملحق الإجابات

للفصل الثالث

الاحتمالات

ملحق الحل

التهيئة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبة :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 إذا ألقى مجسم ذو 4 وجوه متطابقة كتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4 فإن احتمال أن يكون العدد على الوجه الظاهر عدد فردي هو:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{3}{6}$

2 يبين الجدول أدناه نتائج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى أربعة قطاعات متطابقة ومرقمة بالأعداد من 1-4 فإن الإحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد أولى يساوي:

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		3
2		7
3		6
4		4

- (A) $\frac{7}{20}$ (B) $\frac{9}{20}$ (C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{13}{20}$

3 ناتج العبارة $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9}$ في أبسط صورة

- (A) $\frac{6}{11}$ (B) $\frac{4}{27}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$

4 ألقى مجسم ذو 5 وجوه متطابقة ، كتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 5 . فإن احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عدداً زوجياً يساوي

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 1 (D) 5

5 في تجربة سحب كرة من كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 6 صفراء و 2 خضراء . أجاب خالد أن احتمال سحب كرة حمراء يساوي تقريباً 27% . وأجاب محمد أن احتمال سحب كرة حمراء يساوي تقريباً 45% . فالذي أجاب إجابة صحيحة هو

- (A) خالد (B) محمد (C) محمد (D) خالد



ملحق الحل

(3-1) تمثيل فضاء العينة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 عدد طرق تكوين عدد مكون من 3 أرقام من الأرقام 2,3,4,5 إذا سمح بتكرار الرقم المستخدم هو

Ⓐ 120 طريقة Ⓑ 48 طريقة Ⓒ 64 طريقة Ⓓ 24 طريقة

2 عدد طرق تكوين عدد مكون من 3 أرقام من الأرقام 5,6,7,8 إذا لم يسمح بتكرار الرقم المستخدم هو

Ⓐ 120 طريقة Ⓑ 48 طريقة Ⓒ 64 طريقة Ⓓ 24 طريقة

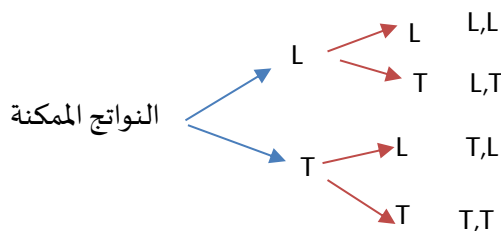
3 تحتوي قائمة الطعام في احد المطاعم 5 أطباق رئيسية و 4 انواع حساء و 3 انواع حلوى فإن عدد الطلبات المختلفة التي يمكن تقديمها بحيث يحتوي كل منها على طبق رئيسي واحد و نوع حساء و اخر حلوى هو

Ⓐ 20 Ⓑ 120 Ⓒ 64 Ⓓ 60

أقيت قطعة نقود مرتين ، مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة أو الجداول أو الرسم الشجري . ؟

القائمة المنظمة: L,L ، L,T ، T,L ، T,T

الرسم الشجري



الجدول

T	L	النواتج الممكنة
L,T	L,L	L
T,T	T,L	T



ملحق الحل

(3-2) الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $nP_2 = 72$ فإن قيمة n تساوي							1
9	(D)	8	(C)	7	(B)	6	(A)
إذا كانت $(n - 1)! = 5040$ فإن n تساوي							2
9	(D)	8	(C)	7	(B)	6	(A)
${}_5C_3 =$							3
20	(D)	15	(C)	10	(B)	60	(A)
عدد طرق اختيار 3 طلاب من 7 طلاب لتمثيل المدرسة في مسابقة ما هو							4
${}_3C_7$	(D)	$7!$	(C)	${}_7P_3$	(B)	${}_7C_3$	(A)
من 10 أعضاء مجلس إدارة شركة يراد اختيار رئيس و نائب رئيس و أمين سرفان عدد طرق الاختيار يكون							5
30 طريقة	(D)	10 طريقة	(C)	120 طريقة	(B)	720 طريقة	(A)
$5! =$							6
5	(D)	720	(C)	120	(B)	24	(A)
$\frac{80!}{79!} =$							7
80	(D)	$\frac{80}{79}$	(C)	1	(B)	$80!$	(A)
${}_5P_2 =$							8
40	(D)	20	(C)	5	(B)	10	(A)



ملحق الحل

(3-3) الاحتمال الهندسي

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:



استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد

(استقرار المؤشر عند اللون الأزرق) p

1

0.19

(D)

0.32

(C)

0.25

(B)

0.07

(A)

إذا اختيرت النقطة x عشوائياً على \overline{JM} فإن احتمال ان تقع x على \overline{LM} هو



2

$\frac{11}{14}$

(D)

$\frac{1}{2}$

(C)

$\frac{3}{14}$

(B)

$\frac{2}{7}$

(A)

رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات و اختيرت نقطة عشوائياً داخل المربع فإن احتمال وقوعها داخل الدائرة يكون

3

$\frac{1}{3}$

(D)

$\frac{1}{9}$

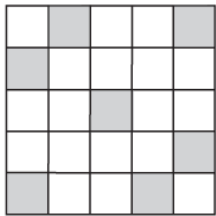
(C)

$\frac{9}{\pi}$

(B)

$\frac{2}{9}$

(A)



اختيرت نقطة واحدة عشوائياً في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع

هذه النقطة في المنطقة المظللة

4

$\frac{7}{18}$

(D)

$\frac{7}{25}$

(C)

$\frac{1}{6}$

(B)

$\frac{1}{9}$

(A)



ملحق الحل

(3-4) احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبية :

الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 سوداء إذا سحبت كرتان عشوائياً على التوالي، فإن احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء يساوي:

$\frac{12}{49}$	Ⓓ	$\frac{2}{7}$	Ⓒ	$\frac{4}{7}$	Ⓑ	$\frac{1}{2}$	Ⓐ
-----------------	---	---------------	---	---------------	---	---------------	---

2 عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة فإن احتمال ظهور الشعار و العدد 6 يساوي

$\frac{1}{12}$	Ⓓ	$\frac{1}{2}$	Ⓒ	$\frac{1}{4}$	Ⓑ	1	Ⓐ
----------------	---	---------------	---	---------------	---	---	---

3 كيس يحتوي كراين زرقاوين و 9 كرات حمراء فإن احتمال سحب كرتين حمراء الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع يكون

$\frac{1}{55}$	Ⓓ	$\frac{81}{121}$	Ⓒ	$\frac{36}{55}$	Ⓑ	$\frac{9}{11}$	Ⓐ
----------------	---	------------------	---	-----------------	---	----------------	---

4 إذا كان $P(A/B) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ فإن $P(A \cap B)$ تساوي

$\frac{5}{6}$	Ⓓ	$\frac{2}{3}$	Ⓒ	$\frac{1}{2}$	Ⓑ	$\frac{1}{3}$	Ⓐ
---------------	---	---------------	---	---------------	---	---------------	---



ملحق الحل

(3-5) احتمالات الحوادث المتنافية

الوحدة الثالثة:
الاحتمالات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

1 كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء و كرة واحدة زرقاء سحبت من الكيس كرة واحدة فإن احتمال كونها حمراء أو زرقاء يساوي

$\frac{1}{4}$	Ⓓ	$\frac{1}{8}$	Ⓒ	$\frac{3}{8}$	Ⓑ	$\frac{1}{2}$	Ⓐ
---------------	---	---------------	---	---------------	---	---------------	---

2 رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 فإن احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

1	Ⓓ	$\frac{5}{6}$	Ⓒ	$\frac{2}{3}$	Ⓑ	$\frac{1}{6}$	Ⓐ
---	---	---------------	---	---------------	---	---------------	---

3 إذا كان احتمال ان يصيب صياد هدف ما 0.5 و احتمال ان يصيب صياد اخر نفس الهدف هو 0.6 و احتمال ان يصيبه الاثنان معا هو 0.3 فإن احتمال ان يصيبه الصياد الاول أو الثاني هو

1	Ⓓ	0.9	Ⓒ	0.8	Ⓑ	1.1	Ⓐ
---	---	-----	---	-----	---	-----	---

4 لأي حادثة A إذا كان $P(A)=0.3$ فإن $P(\bar{A})$ تساوي

1.3	Ⓓ	0.7	Ⓒ	0.3	Ⓑ	1	Ⓐ
-----	---	-----	---	-----	---	---	---



ملحق الإجابات
للفصل الرابع
حساب المثلثات

ملحق الحل

التهيئة

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

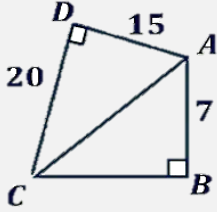
الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة :

1 لدى أسامة حديقة مستطيلة الشكل بعديها 9cm ، 12cm ، أراد بناء سور على قطر الحديقة . إذا كانت تكلفة بناء المتر الواحد للسور يساوي 120 ريال، فكم ستبلغ تكلفة بناء السور كاملاً ؟

- (A) 800 ريال (B) 1200 ريال (C) 1800 ريال (D) 2000 ريال

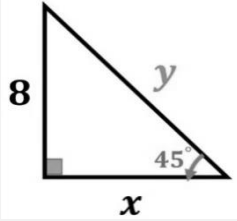


2 في الشكل المقابل طول الضلع \overline{CB} يساوي:

- (A) 7 (B) 20 (C) 24 (D) 30

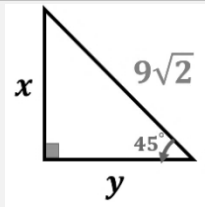
3 الأطوال التي تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث قائم الزاوية من بين الأطوال المعطاة هي

- (A) 2 , 4 , 6 (B) 10 , 6 , 12 (C) 25 , 20 , 15 (D) 9 , 10 , 8



4 قيمة y في الشكل المقابل تساوي

- (A) $8\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 8 (D) 4



5 قيم x, y في الشكل المجاور

- (A) $x = 4.5, y = 3$ (B) $x = \sqrt{2}, y = 3\sqrt{2}$ (C) $x = 9, y = 9$ (D) $x = 9\sqrt{2}, y = 3$



ملحق الحل


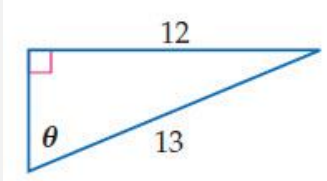
(4-1) الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

$\sin \theta$ تساوي								1
$\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	(D)	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	(C)	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	(B)	$\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	(A)	
$\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ يساوي								2
$\tan \theta$	(D)	$\cot \theta$	(C)	$\sec \theta$	(B)	$\csc \theta$	(A)	
من الشكل المقابل تكون $\sec \theta$ تساوي								3
								
$\frac{5}{4}$	(D)	$\frac{5}{3}$	(C)	$\frac{4}{5}$	(B)	$\frac{3}{5}$	(A)	
من الشكل المقابل تكون $\csc \theta$ تساوي								4
								
$\frac{13}{12}$	(D)	$\frac{5}{13}$	(C)	$\frac{13}{5}$	(B)	$\frac{12}{13}$	(A)	
إذا كانت $\cos \beta = \frac{3}{5}$ فإن $\tan \beta$ تساوي								5
$\frac{4}{3}$	(D)	$\frac{5}{4}$	(C)	$\frac{4}{5}$	(B)	$\frac{3}{4}$	(A)	



ملحق الحل

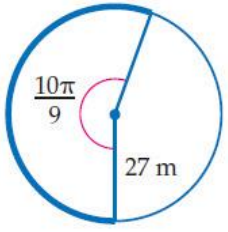
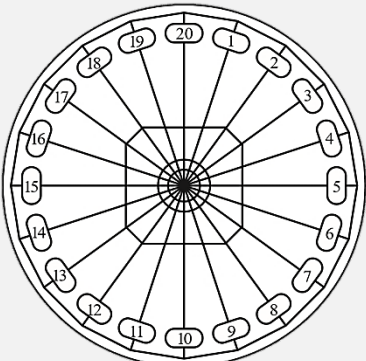
(4-2) الزوايا وقياساتها

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

30° تساوي								1
$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	(D)	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	(C)	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	(B)	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	(A)	
$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ تساوي								2
270°	(D)	120°	(C)	240°	(B)	180°	(A)	
<p>طول القوس المحدد في الشكل المقابل لأقرب جزء من عشرة</p> 								3
94m	(D)	94.3m	(C)	94.2m	(B)	95m	(A)	
<p>الزاوية في الوضع القياسي المشتركة مع الزاوية 65° في ضلع الانتهاء هي:</p>								4
-812°	(D)	-200°	(C)	360°	(B)	425°	(A)	
<p>عجلة دوارة تحتوي على 20 مقعداً مرقمة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي . إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية ، فإن قياس الزاوية المركزية التي يكوّنها المقعدان 1 و 8 بالدرجات يساوي :</p> 								5
55°	(D)	102°	(C)	150°	(B)	126°	(A)	



ملحق الحل

(4-3) الدوال المثلثية للزوايا

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

أي الدوال المثلثية قيمتها تساوي 0								1
$\cot 0^\circ$	(D)	$\cos \pi$	(C)	$\sin 180^\circ$	(B)	$\tan \frac{\pi}{2}$	(A)	
القيمة الدقيقة لـ $\sin 240^\circ$								2
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(D)	$-\frac{1}{2}$	(C)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(B)	$-\sqrt{3}$	(A)	
الزاوية المرجعية للزاوية 150° هي								3
-210°	(D)	45°	(C)	60°	(B)	30°	(A)	
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-4, -3)$ أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$								4
$-\frac{5}{4}$	(D)	$-\frac{3}{5}$	(C)	$-\frac{4}{5}$	(B)	$-\frac{5}{3}$	(A)	
أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$								5
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(D)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(B)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(A)	



ملحق الحل

قانون الجيوب (4-4)

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبته :

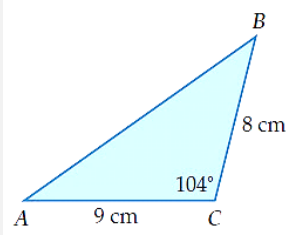
الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

مساحة ΔABC الذي فيه $A = 31^\circ, b = 18m, c = 22m$ مقربة لأقرب جزء من عشرة

1

339.4m² (D) 102m² (C) 169.7m² (B) 204m² (A)



مساحة المثلث الموضح بالشكل لأقرب جزء من عشرة

2

34m² (D) 69.9m² (C) 8.7m² (B) 34.9m² (A)

حدد المثلث الذي لا يوجد لها حل فيما يلي

$A = 30^\circ, a = 1, b = 4$ (C) $A = 35^\circ, a = 17, b = 20$ (A)

3

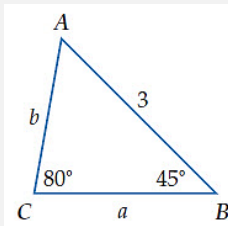
$A = 105^\circ, a = 9, b = 6$ (D) $A = 26^\circ, a = 7, b = 6$ (B)

أي مثلث مما يأتي له حلان

4

$A = 32^\circ, a = 16, b = 21$ (C) $A = 130^\circ, a = 19, b = 11$ (A)

$A = 90^\circ, a = 25, b = 15$ (D) $A = 45^\circ, a = 4\sqrt{2}, b = 8$ (B)



من الشكل المقابل طول b لأقرب جزء من عشرة يكون

5

2.2 (D) 1.7 (C) 0.7 (B) 4.2 (A)



ملحق الحل

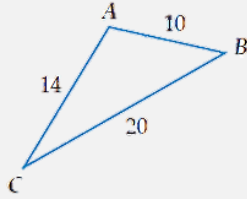
قانون جيب التمام (4-5)

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:



من الشكل قياس زاوية A لأقرب درجة

1

101°

Ⓓ

120°

Ⓒ

22°

Ⓑ

112°

Ⓐ

إذا كان ΔABC $a=...$ فإن $A=35^\circ$ ، $b=2$ ، $c=6$

2

4.5

Ⓓ

5.5

Ⓒ

7.7

Ⓑ

20.3

Ⓐ

مخيم للكشافة له بوابتان A، B بينهما 80 m، يقع مكتب مدير المخيم عند النقطة O على بعد 95m من A وعلى بعد 115 m من B. ما قياس الزاوية AOB ؟

3

20.33°

Ⓓ

52.11°

Ⓒ

43.5°

Ⓑ

35.52°

Ⓐ

ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة خطأ أمام العبارة الخاطئة:

صح

إذا كان ΔABC مثلث فيه: $\cos A = 0.4$ ، $b = 2.5\text{cm}$ ، $c = 2\text{cm}$

1

فإن المثلث ΔABC مثلث متطابق الضلعين

خطأ

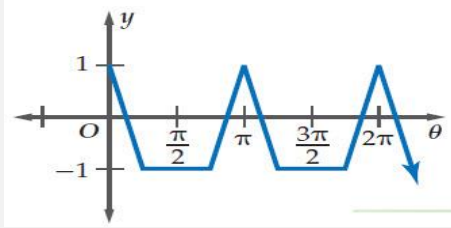
في المثلث ΔABC حيث $a = 13$ ، $A = 41^\circ$ ، $B = 64^\circ$:

2

فإن القانون الذي يتعين البدء باستخدامه لحل المثلث هو قانون جيب التمام



اختر الإجابة الصحيحة:



طول الدورة للدالة الممثلة بالشكل يكون

1

2π

(D)

$\frac{3\pi}{2}$

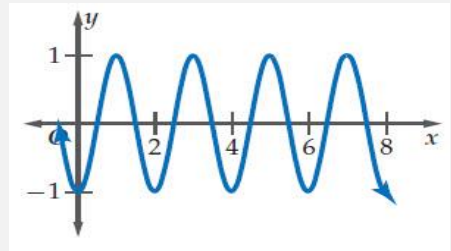
(C)

π

(B)

$\frac{\pi}{2}$

(A)



طول الدورة للدالة الممثلة بالشكل هي:

2

6

(D)

3

(C)

4

(B)

2

(A)

$\sin 840^\circ =$

3

$-\frac{1}{2}$

(D)

$\frac{1}{2}$

(C)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(A)

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$P\left(\frac{20}{29}, -\frac{21}{29}\right)$ فأوجد $\sec \theta$

4

$\frac{29}{20}$

(D)

$\frac{20}{29}$

(C)

$-\frac{29}{21}$

(B)

$-\frac{21}{29}$

(A)

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

5

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(A)



تمثيل الدوال المثلثية بيانياً (4-7)

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبة:

الاسم:

اختر الإجابة الصحيحة:

طول الدورة للدالة $y = \csc 2\theta$ يكون

1

90°

Ⓓ

180°

Ⓒ

270°

Ⓑ

360°

Ⓐ

في الدالة المثلثية $y = 4\sin 3\theta$ ، من نقاط تقاطع الدالة مع المحور θ تساوي:

2

(45°, 0)

Ⓓ

(30°, 0)

Ⓒ

(60°, 0)

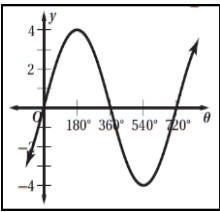
Ⓑ

(180°, 0°)

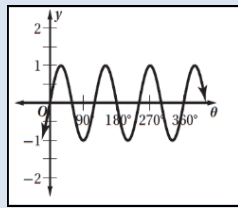
Ⓐ

التمثيل البياني للدالة المثلثية $y = \sin 3\theta$

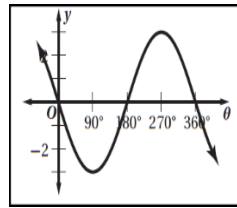
3



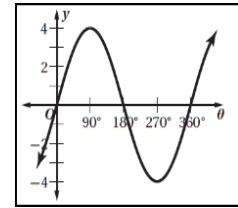
Ⓓ



Ⓒ



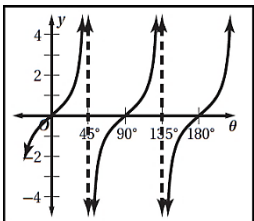
Ⓑ



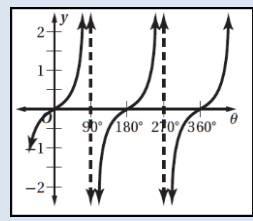
Ⓐ

التمثيل الصحيح للدالة $y = \tan 2\theta$

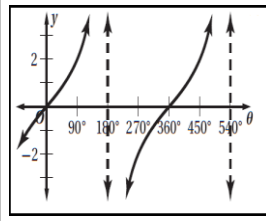
4



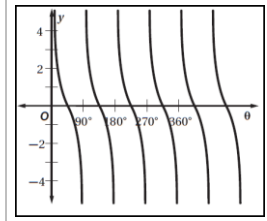
Ⓓ



Ⓒ



Ⓑ



Ⓐ

طول الدورة في الدالة $y = 2 \tan \frac{2}{3}\theta$

5

120°

Ⓓ

240°

Ⓒ

270°

Ⓑ

540°

Ⓐ



ملحق الحل

(4-8) الدوال المثلثية العكسية

الوحدة الرابعة:
حساب المثلثات

الشعبته :




الاسم :

اختر الإجابة الصحيحة :

يكون $y = \sin^{-1} x$ مجال الدالة							1
$\mathbb{R}\{1\}$	Ⓓ	\mathbb{R}	Ⓒ	$-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$	Ⓑ	$-1 \leq x \leq 1$	Ⓐ
على الفترة $[0, \pi]$ $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$							2
225°	Ⓓ	$45^\circ, 135^\circ$	Ⓒ	135°	Ⓑ	45°	Ⓐ
قيمة $\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{8}\right)$ الى اقرب جزء من مئة							3
0.36	Ⓓ	0.35	Ⓒ	0.4	Ⓑ	0.94	Ⓐ
إذا كانت $\sin \theta = 0.422$ فان قياس الزاوية θ بالدرجات							4
65°	Ⓓ	48	Ⓒ	42°	Ⓑ	25°	Ⓐ
إذا كانت $\tan \theta = 1.8$ فان قياس الزاوية θ بالدرجات							5
لا يوجد حل	Ⓓ	60.9°	Ⓒ	29.1°	Ⓑ	0.03°	Ⓐ



المؤلفون

1	أ/ شيمة يوسف نافع الحربي	
2	أ/ روان تيسير أحمد القضاة	
3	أ/ محمد عبدالله علي الثبتي	

المراجعون

1	أ/ لطيفة سلامة دغيشم العمار
2	أ/ مفلح فلاح عطية الرادادي
3	أ/ هند علي محمد العديني

تنسيق

1	أ/ شيمة يوسف نافع الحربي
2	أ/ روان تيسير أحمد القضاة
3	أ/ محمد علي أحمد الشواف

تصميم الغلاف

1	أ/ توفيق علي أحمد زكري
---	------------------------

المرجع:

1- ماجروهيل. رياضيات 3. وزارة التعليم، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)

2- <https://ar.wikipedia.org> بوابة الرياضيات

3- <https://www.nagwa.com/en/>