



قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



وزارة التعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الجزء الثاني من المقرر



قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

يوزع مجاناً للإبّاع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1447

طبعة ١٤٤٧ - ٢٠٢٥

ح) المركز الوطني للمناهج ، ١٤٤٧هـ

المركز الوطني للمناهج

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط - الجزء الثاني من المقرر. /
المركز الوطني للمناهج - الرياض، ١٤٤٧هـ.
٢٢٢ ص؛ ٢١، ٥ X ٢٧ سم

رقم الإيداع : ١٤٤٧/١١٢٤

ردمك : ٨-١٤٦-٥١٤-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم
www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



ien.edu.sa

أعضاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم؛
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.



fb.ien.edu.sa



وزارة التعليم

Ministry of Education

2025 - 1447

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للطلاب فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعياً بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءاً من المرحلة الابتدائية؛ سعياً للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
 - تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
 - إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
 - الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
 - الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
 - الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
 - الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.
- ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطورة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطلاب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.
- ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447



الفهرس

التحليل والمعادلات التربيعية



- التهيئة للفصل ٧ ٦١
- ١-٧ تحليل وحيدات الحد ٦٢
- ٢-٧ استعمال خاصية التوزيع ٦٦
- ٧٣ معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود.....
- ٣-٧ المعادلات التربيعية: $س^2 + ب س + ج = ٠$ ٧٥
- ٨٢ **اختبار منتصف الفصل**
- ٤-٧ المعادلات التربيعية: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ٨٣
- ٥-٧ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين ٨٩
- ٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة..... ٩٥
- اختبار الفصل**..... ١٠٣
- الاختبار التراكمي**..... ١٠٤

الدوال التربيعية



- التهيئة للفصل ٨ ١٠٧
- ١-٨ تمثيل الدوال التربيعية بيانياً ١٠٨
- ١١٧ معمل الجبر: معدل التغير في الدالة التربيعية
- ٢-٨ حل المعادلات التربيعية بيانياً ١١٨
- اختبار منتصف الفصل**..... ١٢٣
- ٣-٨ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع ١٢٤
- ٤-٨ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام ١٣٠
- اختبار الفصل**..... ١٣٧
- الاختبار التراكمي**..... ١٣٨

كثيرات الحدود



- التهيئة للفصل ٦ ١١
- ١-٦ ضرب وحيدات الحد ١٢
- ٢-٦ قسمة وحيدات الحد ١٨
- ٣-٦ كثيرات الحدود ٢٤
- معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها.
- ٢٩.....
- ٤-٦ جمع كثيرات الحدود وطرحها ٣١
- اختبار منتصف الفصل**..... ٣٦
- ٥-٦ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود ٣٧
- معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود ٤٣
- ٦-٦ ضرب كثيرات الحدود ٤٥
- ٧-٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود .. ٥١
- اختبار الفصل**..... ٥٧
- الاختبار التراكمي**..... ٥٨



المعادلات الجذرية والمثلثات

الفصل
٩

١٤١	التهيئة للفصل ٩
١٤٢	١-٩ تبسيط العبارات الجذرية
١٤٨	٢-٩ معمل الحاسبة البيانية : الأسس النسبية
١٤٩	٣-٩ العمليات على العبارات الجذرية
١٥٤	٤-٩ المعادلات الجذرية
١٥٨	٥-٩ نظرية فيثاغورس
١٦٣	اختبار منتصف الفصل
١٦٤	٦-٩ المسافة بين نقطتين
١٦٨	٧-٩ المثلثات المتشابهة
١٧٤	اختبار الفصل
١٧٥	الاختبار التراكمي

الإحصاء والاحتمال

الفصل
١٠

١٨٥	التهيئة للفصل ١٠
١٨٦	١-١٠ تصميم دراسة مسحية
١٩١	٢-١٠ تحليل نتائج الدراسة المسحية
١٩٨	٣-١٠ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع
٢٠٥	اختبار منتصف الفصل
٢٠٦	٤-١٠ التباديل والتوافيق
٢١٣	٥-١٠ احتمالات الحوادث المركبة
٢١٩	اختبار الفصل
٢٢٠	الاختبار التراكمي



ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- المعادلات الخطية والتربيعية.
- الدوال الخطية والتربيعية.
- كثيرات الحدود والعبارات الجذرية.
- الإحصاء والاحتمال.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الرياضية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتتعلم أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- اقرأ فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن**.
- ابحث عن **المفردات** المظللة باللون الأصفر، وقرأ تعريف كل منها.
- راجع المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- ارجع إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- ارجع إلى فقرة **قراءة الرياضيات**؛ لتذكر نطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- تذكر بعض المفردات التي تعلمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**.
- ارجع إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجنبها.
- ارجع إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- استعن بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- ارجع إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- استعمل أسئلة **استعد للدرس اللاحق** لمراجعة بعض المهارات والمفاهيم اللازمة للدرس التالي.
- نفذ **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تراجع أفكار الدرس مستفيداً مما دونه من أفكار في **المخطويات**.
- نفذ **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وما قبله من فصول.



الفصل ٦

كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

سباق الجري: يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

المفردات:

- وحيدة الحد ص (١٢)
- رتبة المقدار ص (٢١)
- كثيرة الحدود ص (٢٤)



منظم أفكار

المطويات

كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئاً بثمانى أوراق A4.

- ١ رتب الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكون كتيباً.
- ٢ ثبت الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطاً من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.
- ٣ سم غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضع أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.





التهيئة للفصل ٦

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل بدء الإجابة:

مراجعة سريعة

مثال ١

اكتب العبارة الآتية بالصيغة الأسية:

$$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$$

العدد ٥ أساس واستعمل كعامل ٤ مرات.

س أساس واستعمل كعامل ٣ مرات.

$$\text{إذن } ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^٤ + ٥^٣$$

اختبار سريع

اكتب كل عبارة فيما يأتي بالصيغة الأسية: (مهارة سابقة)

$$(١) \quad ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤$$

$$(٢) \quad ب \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب$$

$$(٣) \quad م \times م \times م \times م \times م \times م \times م \times م \times م \times م$$

$$(٤) \quad \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$$

$$(٥) \quad \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص}$$

مثال ٢

أوجد قيمة $(\frac{٥}{٧})^٢$.

اكتب القوى في صورة حاصل ضرب

اضرب

$$\frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧} = (\frac{٥}{٧})^٢$$

$$\frac{٢٥}{٤٩} =$$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٦) \quad ٣^٢ \quad (٧) \quad (-٥)^٢ \quad (٨) \quad ٣^٣$$

$$(٩) \quad (-٤)^٣ \quad (١٠) \quad (\frac{٢}{٣})^٢ \quad (١١) \quad (\frac{١}{٢})^٤$$

(١٢) **مدرسة:** إذا كان احتمال تخمين الإجابة الصحيحة

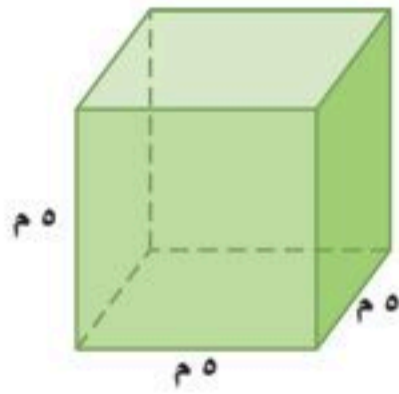
عن ٥ أسئلة من نوع الصواب والخطأ هو $(\frac{١}{٣})^٥$ ،

فعبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر اعتيادي دون

استعمال الأسس.

مثال ٣

أوجد حجم الشكل المجاور.



حجم متوازي المستطيلات

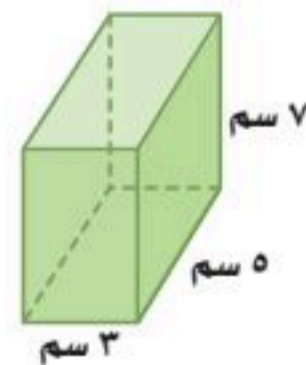
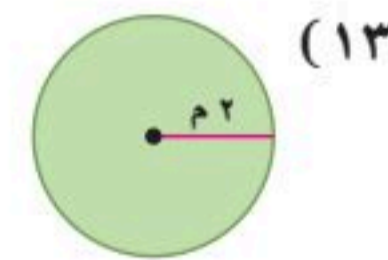
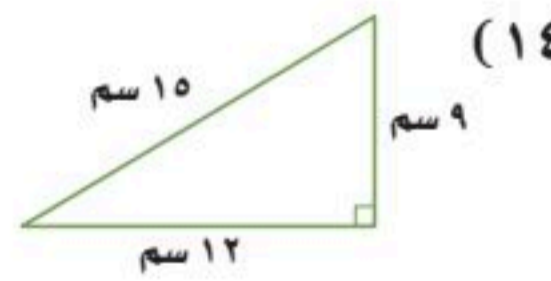
$$ل = ٥، ض = ٥، ع = ٥$$

$$ح = ل \times ض \times ع$$

$$١٢٥ = ٥ \times ٥ \times ٥ =$$

الحجم ١٢٥ م^٣.

أوجد مساحة كل من الشكلين الآتيين: (مهارة سابقة)



(١٥) أوجد حجم الشكل المجاور.





ضرب وحيدات الحد

لماذا؟

تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي $ق = ك \left(\frac{ع}{٢٣٤} \right)^٣$ ؛ حيث تمثل: $ق$ قوة المحرك بالحصان، $ك$ كتلة السيارة بركابها، $ع$ سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل. من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: $ك \left(\frac{ع}{٢٣٤} \right)^٣$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد. أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل: $\frac{أب}{ج}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًا. ووحيدة الحد $٣س$ هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير $س$ فيها ١ ، أما وحيدة الحد $٢س$ فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١ .

١-٦

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المضردات

وحيدة الحد

الثابت

مثال ١ تمييز وحيدات الحد

حدّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

- (أ) ١٠ نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.
- (ب) $٢٤ + ف$ لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.
- (ج) $هـ^٢$ نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.
- (د) $ل$ نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك

(أ) $٢٣أب ج د^٢$
(ب) $\frac{م}{ن}$

(أ) $٥ + س$
(ب) $\frac{س ص ع^٢}{٢}$

تذكّر أن العبارة التي على الصورة $س^ن$ التي تعبر عن نتيجة ضرب $س$ في نفسها $ن$ مرة تُسمى قوة. ويُطلق على $س$ الأساس، وعلى $ن$ الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.

$$٨١ = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^٤$$

أس
أساس
٤ عوامل



ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{c} \text{عوامل 3} \quad \text{عوامل 4} \\ \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{عوامل 3}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4}_{\text{عوامل 4}} = 4^3 \times 4^4 \\ \text{عوامل 5} = 3 + 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{عوامل 4} \quad \text{عوامل 2} \\ \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{عوامل 4}} \times \underbrace{2 \times 2}_{\text{عوامل 2}} = 2^4 \times 2^2 \\ \text{عوامل 6} = 4 + 2 \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي ضرب القوى

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أسيهما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $A^m \times A^n = A^{m+n}$.

أمثلة: $B^3 \times B^5 = B^{3+5} = B^8$ $B^5 \times B^3 = B^{5+3} = B^8$ $B^6 \times B^4 = B^{6+4} = B^{10}$

مثال ٢ ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(أ) $(3n^6)(2n^7)$

$$(3n^6)(2n^7) = (2 \times 3)(n^6 \times n^7)$$

$$= (2 \times 3)(n^{6+7})$$

$$= 6n^{13}$$

(ب) $(3h^3)(4h^2)$

$$(3h^3)(4h^2) = (3 \times 4)(h^3 \times h^2) = (1 \times 3)(h^{3+2})$$

$$= (1 \times 3)(h^{3+2}) = 3h^5$$

$$= 3h^5$$

تحقق من فهمك

(٢ب) $(-4rs^2n^3)(-6rs^0n^2)$

(١٢أ) $(3v^4)(7v^0)$

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملاً وقوة

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أي أن $s^1 = 1$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{c} \text{عوامل 3} \quad \text{عوامل 4} \\ \underbrace{(r^4)(r^4)(r^4)}_{\text{عوامل 3}} = (r^4)^3 \\ \text{عوامل 12} = 4 + 4 + 4 = 12 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{عوامل 4} \\ \underbrace{(2^3)(2^3)(2^3)(2^3)}_{\text{عوامل 4}} = (2^3)^4 \\ \text{عوامل 12} = 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي قوة القوة

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $(A^m)^n = A^{m \times n}$

أمثلة: $(B^3)^5 = B^{3 \times 5} = B^{15}$ $(B^7)^6 = B^{7 \times 6} = B^{42}$

مثال ٣ قوة القوة

قوة القوة

بسط

قوة القوة

بسط

$$\text{بسط العبارة: } [{}^2({}^3 2)]^4$$

$${}^4({}^2 \times {}^3 2) = {}^4[{}^2({}^3 2)]$$

$${}^4(62) =$$

$${}^4 \times 62 =$$

$$16777216 = 2^4 2 =$$

تحقق من فهمك

$$[{}^3({}^2 3)]^2$$

$$[{}^2({}^2 2)]^4$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة

إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس أو تجمعها، فاكتب العبارة كحاصل ضرب.

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{l} \text{٣ عوامل} \\ \underbrace{({}^2 \text{صع} 2)({}^2 \text{صع} 2)({}^2 \text{صع} 2)}_3 = ({}^2 \text{صع} 2)^3 \\ ({}^2 \text{ع} \times {}^2 \text{ع} \times {}^2 \text{ع}) (\text{ص} \times \text{ص} \times \text{ص}) (2 \times 2 \times 2) = \\ 2^6 \text{ص}^3 = 8 \text{ص}^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{٣ عوامل} \\ \underbrace{({}^2 \text{و} 2)({}^2 \text{و} 2)({}^2 \text{و} 2)}_3 = ({}^2 \text{و} 2)^3 \\ ({}^2 \text{و} \times {}^2 \text{و} \times {}^2 \text{و}) (2 \times 2 \times 2) = \\ 2^3 \text{و}^3 = \end{array}$$

ويبين المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

أضف إلى

مطوياتك

مفهوم أساسي

قوة حاصل الضرب

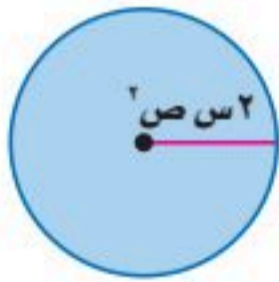
التعبير اللفظي: لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^ن = أ^n ب^n$.

مثال: $(2- \text{ص} 3)^0 = (2-)^0 \text{ص}^0 (3)^0 = 3^0 \text{ص}^0 = 1$.

مثال ٤ قوة حاصل الضرب

هندسة: عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.



مساحة الدائرة

المساحة = ط نق^٢

عوض عن نق بـ 2 ص^٢

$$ط = ط (2 \text{ص} 2)^2$$

قوة حاصل الضرب

$$ط = ط (2^2 \text{ص} 2^2 \text{ص} 2^2)$$

بسط

$$ط = 4 \text{ص} 2 \text{ص} 4 ط$$

إذن، مساحة الدائرة تساوي $4 \text{ص} 2 \text{ص} 4 ط$ وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

٤أ عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه 3 ص^٢ على صورة وحيدة حد.

٤ب عبّر عن مساحة المثلث الذي ارتفاعه 4 وطول قاعدته 5 ب^٢ على صورة وحيدة حد.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تتضمن أقواسًا متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي تبسيط العبارات

- لتبسيط عبارة تتضمن وحيدات حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:
- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
 - لا تتضمن العبارة قوة قوة.
 - تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال ٥ تبسيط العبارات

بسّط العبارة: $(3س٣ ص٤) [٢(ص٢-)]^٣$.

قوة القوة $(3س٣ ص٤) [٢(ص٢-)]^٣ = [٢(ص٢-)]^٣ (3س٣ ص٤)$

قوة حاصل الضرب $(3س٣ ص٤) [٢(ص٢-)]^٣ = ٢٦ (3س٣ ص٤) (ص٢-)^٣$

قوة القوة $٢٦ (3س٣ ص٤) (ص٢-)^٣ = ٩س٢ ص٢٦ (٦٤) ص٦$

خاصية الإبدال $٩س٢ ص٢٦ (٦٤) ص٦ = ٩س٢ ص٦ (٦٤) ص٢٦$

ضرب القوى $٩س٢ ص٦ (٦٤) ص٢٦ = ٥٧٦س٢ ص١٤$

تحقق من فهمك

(٥) بسّط العبارة: $(\frac{١}{٣}أ٢ ب٢) [٢(ب٤-)]^٣$.

تأكد

مثال ١

حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

(١) ١٥ (٢) $٣-٢$ (٣) $\frac{٥}{د}$ (٤) $١٥-ج٢$ (٥) $\frac{ج}{٢}$ (٦) $٩+ب٧$

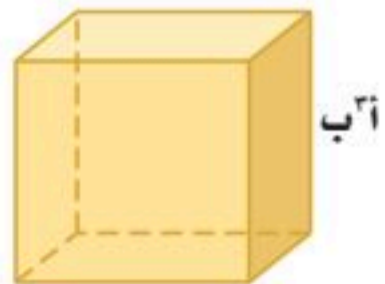
بسّط كل عبارة مما يأتي:

المثالان ٢، ٣

(٧) $ك(ك٣)$ (٨) $م(م٢)٤$ (٩) $٢ك(٩ك٤)$ (١٠) $(٥م٤ف)(٣م٤ف)$ (١١) $[٢(٢٣)]^٢$ (١٢) $(س٤ص٤)٦$ (١٣) $(٢-ف٢ج٣ه٢)٣$ (١٤) $(٦٥ن٤)٤$ (١٥) $(٤أ٤ب٩ج)٢$

مثال ٤

(١٦) هندسة: مساحة سطح المكعب هي $٦ص٢$ ، حيث $م$ مساحة سطحه، $ص$ طول حرفه.



(أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد.

(ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان $أ=٣$ ، $ب=٤$ ؟

مثال ٥

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(١٧) $(٥س٢ص٤) [٢(ص٢-)]^٣ (٤س٣ص٤) (٤س٣ص٤) (٤س٣ص٤) [٢(ص٢-)]^٣$ (١٨) $(٤س٣ص٤) (٤س٣ص٤) (٤س٣ص٤) [٢(ص٢-)]^٣$ (١٩) $(٢-ج٣ه٢) (٤-ج٣ه٢) (٤-ج٣ه٢) (٤-ج٣ه٢) [٢(ج٣ه٢)]^٣$ (٢٠) $(٧-أ٤ب٩ج) (٧-أ٤ب٩ج) [٢(ج٣ه٢)]^٣$

وزارة التعليم

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

- (٢١) ١٢٢ (٢٢) ٤٣ (٢٣) $٢+ج٢$
 (٢٤) $\frac{٢-ج}{٤-هـ}$ (٢٥) $\frac{ك٥}{١٠}$ (٢٦) $٣+م٦$

المثالان ٢، ٣ بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (٢٧) $(٢ك٢)(٤ك٢)$ (٢٨) $(ص٦ع٤)(٩ع٦)$
 (٢٩) $(٤١٤ج٢هـ)(٣٤ج٢هـ)$ (٣٠) $٢[٢(٢٢)]$
 (٣١) $٢[٣(٢ص٢-)]$ (٣٢) $٤(٧ك٥)$

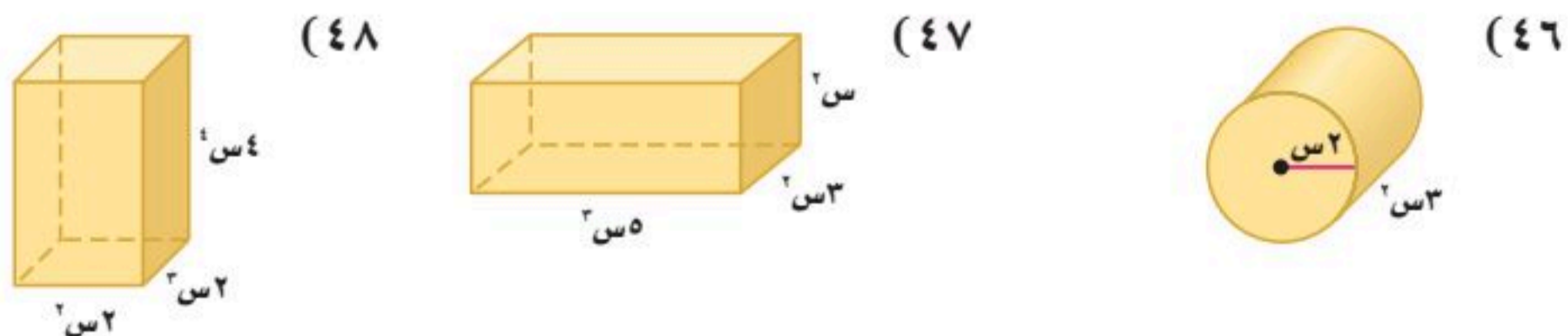
مثال ٤ هندسة: عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:



مثال ٥ بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (٣٥) $٣(٣٤)٤(٣٤٢)$ (٣٦) $٢(٣-ج٣)٢(٣-ج٥)$
 (٣٧) $٢[٣(٢-ج٤هـ)]٣(٤ج٢هـ)$ (٣٨) $٢[٢(٤ك٤م)]٣(٥ك٢م)$
 (٣٩) $(ب٢ر٥)٤(٧ب٣ر٤)٢(٦ب٣ر٣)$ (٤٠) $(٥ب٢ج٣)٢(٦ب٣ج٤)٢$
 (٤١) $٢(٥,٥س٣)$ (٤٢) $٣(٤-ج٣)$
 (٤٣) $٢(٤٤٥)$ (٤٤) $(٤٤٩م)٢(٤٩م)٢(٧ب١)٢(١٣٤ب٥)$
 (٤٥) $(٣ب٢ج٢)٢(٢ب٢ج٢)٢(٤ب٢ج٢)٢(٥ب٢ج٢)٢(٦ب٢ج٢)٢(٧ب٢ج٢)٢$

هندسة: عبّر عن حجم كل مجسم مما يأتي على صورة وحيدة حد:



(٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة $E = mc^2$. حيث: c هي الطاقة بالجول و m الكتلة بالكيلوجرام و c سرعة الضوء تبلغ 300 مليون متر لكل ثانية تقريباً.

(أ) أكمل حسابات تحويل 3 كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة.

(ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثلي ما كانت عليه؟

(٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.

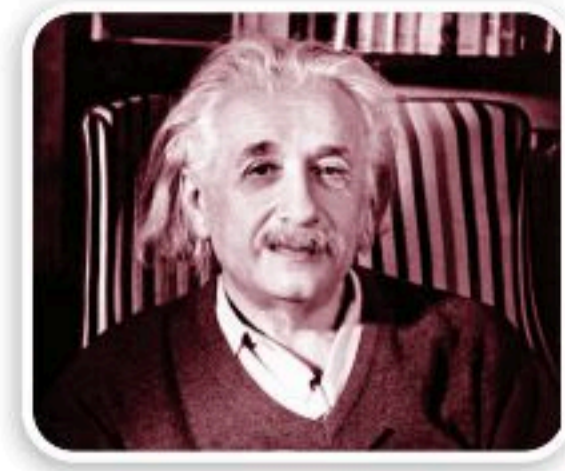
(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

القوة	4^3	3^3	2^3	1^3	0^3	1^3	2^3	3^3	4^3
القيمة									

(ب) **تحليلياً:** ما قيمتا 5^0 ، 5^{-1} ؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.

(ج) **تحليلياً:** أكمل: لأي عدد غير صفري a ، وأي عدد صحيح n ، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

(د) **لفظياً:** ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟



تاريخ الرياضيات

١٨٧٩م - ١٩٥٥م
يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه $E = mc^2$ ، المعروف باسمه، حيث تمثل c الطاقة، m كتلة المادة، c سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحو كافٍ.

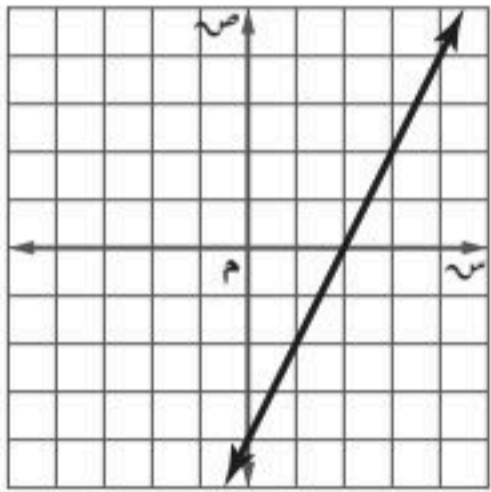
مسائل مهارات التفكير العليا

(٥١) **تحذّر:** بسّط العبارة $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ موضّحاً كل خطوة، علماً بأن: a ، b عدداً حقيقيين غير صفريين، m ، n عدداً صحيحان.

(٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى s^6 .

(٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفسّر كيف تستعمل كلاً منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار



(٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجباً، ومقطعه الصادي سالباً، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟

(٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟

- (أ) $6s - 3$ ص
(ب) $\frac{1}{4}a^2$
(ج) $\frac{1}{3}b - 2$
(د) $5c - 4$

مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (مهارة سابقة)

(٥٨) $(-5, -4)$ ، $ص = \frac{1}{4}s + 1$

(٥٧) $(2, -1)$ ، $ص = 2s + 2$

(٥٦) $(3, 2)$ ، $ص = s - 6$

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

(٦١) $\frac{2}{3}s = 7$

(٦٠) $\frac{2}{5}ص = 10$

(٥٩) $ص = 28 - 2$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:



(٦٤) $3, 42 \div (-6)$

(٦٣) $3, 78 \div 1$

(٦٢) $(-8) \div 64$

وزارة التعليم

(٦٧) $4, 6 \div 98, 44 -$

(٦٦) $(-2, 5) \div 32, 5 -$

(٦٥) $10, 5 \div 23, 94 -$

قسمة وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

بلغ عدد سكان منطقة مكة المكرمة في عام ١٤٣٨ هـ ٨٣٢٥٣٠٤ نسمة أي عشرة مليون نسمة تقريباً أو ٧١٠، وبلغ عدد سكان منطقة القصيم في العام نفسه ١٣٨٧٩٩٦ نسمة أي مليون نسمة تقريباً أو ٦١٠ فتكون نسبة عدد سكان منطقة مكة المكرمة إلى عدد سكان منطقة القصيم في تلك السنة هي:

$\frac{٧١٠}{٦١٠} = ١١٠$ وهذا يعني أن عدد سكان منطقة مكة المكرمة يساوي ١٠ أمثال عدد سكان منطقة القصيم.

قسمة وحيدات الحد: يمكنك استعمال مبادئ اختصار الكسور الاعتيادية؛ لإيجاد ناتج قسمة وحيدتي حد مثل $\frac{٦١٠}{٦١٠}$ ، انظر إلى نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{\overbrace{ن \times ن \times ن \times ن}^{٤ \text{ عوامل}}}{\underbrace{ن \times ن \times ن}_{٣ \text{ عوامل}}} = \frac{٤}{٣} ن \quad \quad \quad \frac{\overbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}^{٧ \text{ عوامل}}}{\underbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}_{٤ \text{ عوامل}}} = \frac{٧٢}{٤٢} = ٣٢$$

وبيّن المثالان السابقان خاصية قسمة القوى.

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

أجد ناتج قسمة وحيدتي حد.

أبسط عبارات تحتوي أسساً سالبة أو صفرية.

المضردات

الأس الصفري

الأسس السالبة

رتبة المقدار

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

قسمة القوى

التعبير اللفظي: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه اطرح أسيهما (أس البسط - أس المقام).

الرموز: لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ؛ وأي عددين صحيحين m, n ، فإن: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

أمثلة: $\frac{ج^١١}{ج^٨} = ج^{١١-٨} = ج^٣$ $\frac{ر^٥}{ر^٢} = ر^{٥-٢} = ر^٣$

مثال ١

قسمة القوى

بسط العبارة $\frac{ج^٣ ه^٥}{ج ه}$ مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً.

جمع القوى ذات الأساس نفسه $\left(\frac{ج}{ه}\right) \left(\frac{ج^٣}{ج}\right) = \frac{ج^٣ ه^٥}{ج ه}$

اقسم القوى $(ج-٣) (ه-٥) =$

بسط $ج^٢ ه^٣ =$

تحقق من فهمك ✓

(ب) $\frac{ك^٧ م^١٠}{ك^٥ م^٣}$

(أ) $\frac{س^٣ ص^٤}{س^٢ ص}$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{3^3}{3^4} = \frac{\overbrace{3 \times 3 \times 3}^{3 \text{ عوامل}}}{\underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ عوامل}}} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\frac{2^2}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \times 2}^{2 \text{ عاملان}}}{\underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ عاملان}}} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات
تطبق قوانين القوة على
المتغيرات تمامًا كما تطبق
على الأعداد. فمثلاً

$$\frac{3^2 \cdot 2^7}{3^3 \cdot 2^4} = \frac{3^2 (2^3)}{3^3 (2^4)} = \frac{3^2 (2^3)}{3^3 (2^4)}$$

مفهوم أساسي

قوى القسمة

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أوجد كلاً من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

أمثلة: $\frac{4^3}{5^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4$ $\frac{5^0}{2^0} = \left(\frac{5}{2}\right)^0$

مثال ٢

قوى القسمة

بسط العبارة: $\left(\frac{2^3 \cdot 3}{7}\right)^2$

$$\frac{2^2 (2^3 \cdot 3)^2}{7^2} = \frac{2^2 (2^3 \cdot 3)^2}{7^2}$$

$$\frac{2^2 (2^6 \cdot 3^2)}{7^2} =$$

$$\frac{2^8 \cdot 3^2}{49} =$$

تحقق من فهمك ✓

(أ) $\left(\frac{3^4 \cdot 2}{4}\right)^3$ (ب) $\left(\frac{2^2 \cdot 3}{2^3 \cdot 4}\right)^2$ (ج) $\left(\frac{3^4 \cdot 2}{4^3 \cdot 5}\right)^3$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة للأس الصفرى مثل: 3^0 ، 5^0 ، ... ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة $3^0 = 1$

الطريقة ١

ناتج قسمة القوى $5^0 - 5^3 = \frac{5^0}{5^3}$

بسط $5^3 =$

وبما أن للعبارة $\frac{5^0}{5^3}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $5^0 = 1$

أي أن الأس الصفرى لأي عدد لا يساوي الصفر هو الواحد.

الطريقة ٢

تعريف القوى $\frac{3^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5^3}{5^3}$

بسط

$1 =$



وزارة التعليم

مفهوم أساسي

خاصية الأس الصفري

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي صفرًا فإن: $١ = أ^٠$

أمثلة: $١ = ١٥^٠$ $١ = \left(\frac{ب}{ج}\right)^٠$ $١ = \left(\frac{٢}{٧}\right)^٠$

مثال ٣

الأس الصفري

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

(أ) $\left(\frac{٤٠٢٣ ر^٢ - ٩٠٣ ر^٢}{٣ س^٥} - \frac{٢٠٣ ر^٢}{٣ س^٥}\right)$ (ب) $\frac{٣ س^٥}{٣ س^٥}$

(أ) $١ = \left(\frac{٤٠٢٣ ر^٢ - ٩٠٣ ر^٢}{٣ س^٥} - \frac{٢٠٣ ر^٢}{٣ س^٥}\right)$ (ب) $١ = \frac{٣ س^٥}{٣ س^٥}$

اقسم القوى

تحقق من فهمك

(أ٣) $\frac{ب^٤ ج^٢ د^٢}{ب^٢ ج}$ (ب٣) $\left(\frac{٢٠٣ هـ^٧ ج^٢}{٦٠٣ هـ^٩ ج^٣}\right)$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة.
فالعبارة (٥س) تساوي ١ إلا أن العبارة ٥س = ٥

الأسس السالبة: قد تكون **الأسس سالبة** مثل: $٣^{-٢}$ ، $٣^{-٣}$ ، ...، ولاستقصاء معناها يمكنك تبسيط عبارات مثل $\frac{٢ س^٢}{٥ س}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة ٢

تعريف القوى $\frac{٢ س^٢}{٥ س} = \frac{٢ س \times س}{٥ س \times س \times س \times س}$

بسّط

$$\frac{١}{٣ س} =$$

الطريقة ١

نتيجة قسمة القوى $\frac{٢ س^٢}{٥ س} = ٥^{-٢} س^٢$

بسّط

$$٣^{-٢} س =$$

بما أن للعبارة $\frac{٢ س^٢}{٥ س}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $٣^{-٢} س = \frac{١}{٣ س}$

مفهوم أساسي

خاصية الأسس السالبة

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن، فإن مقلوب $أ^{-ن}$ هو $أ^{-ن}$ ، ومقلوب $أ^{-ن}$ هو $أ^{-ن}$.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، وأي عدد صحيح ن، فإن: $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{-ن}$.

أمثلة: $\frac{١}{١٦} = \frac{١}{٤^٢} = ٤^{-٢}$ $\frac{١}{٤^{-٢}} = ٤^٢$

تعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط، وظهر كل أساس مرة واحدة فقط، ولا تتضمن قوى القوى، وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.



نسبة طول الرجل إلى طول النملة يساوي تقريبًا $\frac{10}{3-10}$

اقسم القوى

$$3 = 3 + 0 = (3-) - 0$$

بسّط

$$(3-)-0 \cdot 10 = \frac{10}{3-10}$$

$$3 \cdot 10 =$$

$$1000 =$$

لذا فطول الرجل يساوي ١٠٠٠ مرة من طول النملة تقريبًا. أو نسبة طول الرجل إلى طول النملة تساوي تقريبًا القوة الثالثة للعشرة.

تحقق: نسبة طول الرجل إلى طول النملة هي $\frac{10^7}{3,000,000} = 2125$ وأقرب قوى العشرة للعدد ٢١٢٥ هي 3^{10} ✓

تحقق من فهمك

(٥) علم الفلك: رتبة مقدار كل من كتلة الأرض ودرب التبانة لأقرب قوى العشرة هي: 10^{27} ، 10^{44} على الترتيب. فكم مرة تساوي رتبة مقدار كتلة درب التبانة رتبة مقدار كتلة الأرض؟

تأكد

الأمثلة ٤-١

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$\begin{array}{llll} (1) \frac{4^0 \text{ ل}^4}{\text{ه}^2 \text{ ل}^2} & (2) \frac{3^0 \text{ م}^6 \text{ ر}^3 \text{ ب}^3}{3^0 \text{ م}^2 \text{ ر}^2 \text{ ب}^3} & (3) \frac{4^6 \text{ ج}^6 \text{ ن}^8}{\text{ب}^4 \text{ ج}^4 \text{ ن}^0} & (4) \frac{8^2 \text{ ه}^8 \text{ ج}^2}{\text{ه}^7 \text{ ج}^7} \\ (5) \frac{4^7 \text{ ن}^7 \text{ ف}^2}{2^7 \text{ ن}^7 \text{ ف}^2} & (6) \frac{3^3 \text{ ص}^3 \text{ ع}^6}{\text{ع}^5 \text{ س}^2 \text{ ص}^2} & (7) \frac{6^4 \text{ ك}^4 \text{ و}^6}{\text{ك}^2 \text{ ن}^2 \text{ و}^3} & (8) \frac{3^2 \text{ ر}^3 \text{ ف}^2}{7^2 \text{ ن}^7} \\ (9) \left(\frac{2^3 \text{ د}^0}{2^5 \text{ ه}^2} \right)^0 & (10) \left(\frac{3^3 \text{ ص}^3 \text{ ع}^2}{\text{س}^3 \text{ ص}^3 \text{ ع}^4} \right)^0 & (11) \frac{4^2 \text{ ر}^2 \text{ ف}^0 \text{ ه}^0}{3^2 \text{ ر}^2 \text{ ه}^2} & (12) \frac{3^2 \text{ ج}^3 \text{ ف}^2}{4^2 \text{ ه}^4} \end{array}$$

(١٣) مثال ٥: **إنترنت:** ارتفع عدد مستخدمي الإنترنت في المملكة من ١١٠٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣١ هـ إلى ٢٤٠٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣٨ هـ. حدّد نسبة عدد مستخدمي الإنترنت عام ١٤٣٨ هـ إلى مستخدميها عام ١٤٣١ هـ باستخدام رتبة المقدار للعامين.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ٤-١

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$\begin{array}{llll} (14) \frac{2^4 \text{ م}^2}{\text{م}^2 \text{ ن}^2} & (15) \frac{3^4 \text{ د}^4 \text{ ه}^3}{3^4 \text{ د}^4 \text{ ه}^3} & (16) \left(\frac{3^3 \text{ ص}^3 \text{ ع}^2}{2^2 \text{ ع}^5} \right)^2 & (17) \frac{9^2 \text{ ص}^4 \text{ ع}^2}{2^2 \text{ ع}^2} \\ (18) \frac{8^7 \text{ ب}^7 \text{ ج}^8}{7^7 \text{ ب}^7 \text{ ج}^8} & (19) \left(\frac{5^9 \text{ ج}^9 \text{ ه}^2}{3^2 \text{ ن}^2 \text{ ج}^2 \text{ ه}^2} \right)^0 & (20) \frac{12^7 \text{ ل}^7 \text{ ر}^7}{7^7 \text{ ل}^7 \text{ ر}^7} & (21) \frac{5^2 \text{ ج}^2 \text{ د}^0}{8^2 \text{ ج}^2 \text{ د}^0} \\ (22) \frac{2^2 \text{ ن}^3 \text{ ج}^2 \text{ ه}^0}{2^2 \text{ ن}^3 \text{ ج}^2 \text{ ه}^0} & (23) \frac{12^2 \text{ ل}^4}{15^3 \text{ ل}^3} & (24) \left(\frac{2^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}^4 \text{ ه}^0}{3^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}^4 \text{ ه}^0} \right)^2 & (25) \frac{3^2 \text{ ن}^3 \text{ ل}^3 \text{ س}^0}{\text{ن}^3 \text{ ل}^3 \text{ س}^0} \end{array}$$

مثال ٥



الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقاتها من بطارية الساعة.

(٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى 10^8 عملية في الثانية تقريباً. وازدادت هذه السرعة إلى أكثر من 10^{10} عملية في الثانية عام ١٤٣٨ هـ. فبكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟

(٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة $m = \pi r^2$ لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة $m = l^2$ لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه l . استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:



النسبة	مساحة المربع	مساحة الدائرة	نصف القطر
			نق
			٢نق
			٣نق
			٤نق
			٥نق

- (أ) جبرياً: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.
 (ب) جبرياً: إذا ضرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟
 (ج) جدولياً: أكمل الجدول المقابل.
 (د) تحليلياً: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٢٨) **تبرير:** هل المعادلة " $s \times s = s^2$ " صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك.
 (٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما 2^4 ب 2^3
 (٣٠) **تحذ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة $s^{-n} = \frac{1}{s^n}$
 (٣١) **اكتب:** وضح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

- (٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟
 (أ) ٤٠ س
 (ب) ٨٠ س
 (ج) ١٦٠ س
 (د) ٤٠٠ س
- (٣٣) **بسّط العبارة:** $(4 - 2 \times 5 \times 6)^3$
 (أ) $\frac{1}{64}$
 (ب) ٦٤
 (ج) ٣٢٠
 (د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

- (٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بـ ١٠ مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ (الدرس ٦-٢)
 حلّ كلّ من المتباينات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)
 (٣٥) $5(2-6) < 4$ هـ
 (٣٦) $22 \leq 4(8-b) + 10$
 (٣٧) $5(b-8) \geq 3(b+10)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: بسّط كلّ عبارة فيما يأتي:

(٣٨) $3s + 10$ س

(٣٩) $5 - 2 + 6$ أ

(٤٠) $4ص + 2ص + 15ص$ ص

(٤١) $13(4+5)$ أ



كثيرات الحدود

٣-٦

لماذا؟

سجّلت مبيعات الأجهزة الذكية عالمياً أرقاماً قياسية في المبيعات عام ٢٠١٧ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

$$ع = ١٢٨,٧ + ن + ٤٩,٤ + ٢ن$$

علمًا بأن ع تمثل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثل العبارة $١٢٨,٧ + ن + ٤٩,٤ + ٢ن$ مثلاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماء خاصة. **ثنائية الحد** هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

فيما سبق

درست تمييز وحيدات الحد وخصائصها.

والآن

■ أجد درجة كثيرة الحدود.

■ أكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية.

المفردات

كثيرة حدود

ثنائية الحد

ثلاثية الحدود

درجة وحيدة الحد

درجة كثيرة الحدود

الصورة القياسية لكثيرة الحدود

الحدود

المعامل الرئيس

مثال ١ تمييز كثيرات الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود	هل هي كثيرة حدود؟	العبارة
ثنائية حد	نعم؛ ٤ ص - ٥ س ع هي مجموع وحيدتي حد هما: ٤ ص، -٥ س ع.	(أ) ٤ ص - ٥ س ع
وحيدة حد	نعم؛ -٦,٥ عدد حقيقي.	(ب) -٦,٥
—	لا؛ $٧ - \frac{٧}{٣} = ٣$ ، وهي ليست وحيدة حد.	(ج) $٧ - \frac{٧}{٣} + ٩$
ثلاثية حدود	نعم؛ $٦ س + ٤ س + ٣ س + ٣ = ٦ س + ٥ س + ٣$ ، مجموع ثلاثة حدود.	(د) $٦ س + ٤ س + ٣ س + ٣$

تحقق من فهمك

(أ) ١ س

(ب) $٣ ص - ٢ ص + ٤ ص - ١$

(ج) $٥ ر س + ٧ ن ف ك$

(د) $١٠ س - ٤ - ٨ س أ$

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفر تساوي صفرًا. وليس للصفر درجة. أما **درجة كثيرة الحدود** فهي أكبر درجة لأي حد من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتمادًا على درجتها، فتسمى ذات الدرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

مثال ٢

درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود $٣د٢ - ٩ج - د - ٧$

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد $٣د٢ = ٣$ ، درجة الحد $-٩ج - د = ١ + ٥ = ٦$ ،

درجة الحد -٧ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تحقق من فهمك

(ب) $٣م٢ - ٣م٣ - ٧م٢ - ١٣$

(١٢) $٧ص٥$

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية لكثيرة الحدود** بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس**.

الصورة القياسية: $٧ + ٢ص٢ + ٥ص٣ - ٤ص٤$

المعامل الرئيس أكبر درجة

مثال ٣

الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود $٥ص - ٩ - ٢ص٤ - ٦ص٣$ بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

الدرجة: ٣ ٤ ٠ ١

كثيرة الحدود: $٥ص - ٩ - ٢ص٤ - ٦ص٣$

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: $٢ص٤ - ٦ص٣ + ٥ص - ٩$ فيكون المعامل الرئيس هو ٢

تحقق من فهمك

(ب) $١٠ + ٦ص٦ - ٢ص٢ - ٣ص٥ + ٣ص٦ - ٤ص٣$

(١٣) $٨ - ٢ص٢ + ٤ص٤ - ٣ص٣$

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين سنتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.



الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمنت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتُعد صناعة الأسمنت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.

مثال ٤ من واقع الحياة

استعمال كثيرات الحدود

مصانع: تمثّل المعادلة $٣ن٢ - ٢ن + ١٠$ عدد أطنان الأسمنت بمئات الألف التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٣٣ هـ إلى ١٤٣٨ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فما عدد أطنان الأسمنت المنتجة حتى بداية عام ١٤٣٥ هـ؟

أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمنت.

بما أن ن تمثّل عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فإن: $٢ = ١٤٣٣ - ١٤٣٥ = ن$



وزارة التعليم

الدرس ٦-٣: كثيرات الحدود ٢٥
2025 - 1447

$$ع = 3n^2 - 2n + 10 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 3(2)^2 - 2(2) + 10 \quad n = 2$$

$$= 3(4) - 4 + 10 \quad \text{بسّط}$$

$$= 12 - 4 + 10 = 18 \quad \text{اضرب وبسّط}$$

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألف، أو ١٨٠٠٠٠٠٠.

تحقق من فهمك ✓

١٤) كم طنًا أنتج عام ١٤٣٨ هـ؟

٤ب) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًا سيتم إنتاجه عام ١٤٤٨ هـ؟

تأكد ✓

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

(١) $2ص - 5 + 3ص^2$ (٢) $3س$ (٣) $5م^2ن^3 + 6$ (٤) $5ك - 4 + 6ك$

مثال ٢ أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

(٥) $3 -$ (٦) $6ن^3 - 4$ (٧) $7 - ٤ع$ (٨) $\frac{3}{4}$

(٩) $12 - 7ك + 8ن$ (١٠) $2أ^2ب^5 + 5 - أب$ (١١) $6د^3 + 3د^2ن + 2د + 1$

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدّد المعامل الرئيس فيها:

(١٢) $3ص^3 + 3ص - 2 + 3ص^2$ (١٣) $4ع - 2ع^2 - 5ع^3$ (١٤) $12 + 4أ^3 - 5أ^2 - 1$

مثال ٤ (١٥) **جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجلين في جامعة من عام ١٤٣٠ هـ إلى ١٤٣٩ هـ

بالمئات بالمعادلة $ن = ٥س^2 + ١س + ٥$ ، حيث $س$ عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

(أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٥ هـ؟

(ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٧ هـ؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

(١٦) $5ص^3 + 4س$ (١٧) 21 (١٨) $1 + 2ج - 4ج^2$

(١٩) $3د + د^3 - ج$ (٢٠) $2أ - أ^2$ (٢١) $3ن + 3ك^3$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

مثال ٢

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٢٢) \quad ١٣ - ٤أب + ٣٥ب \quad (٢٣) \quad ٨ - ٣س \quad (٢٤) \quad ٤ -$$

$$(٢٥) \quad ١٧ج - ٢هـ \quad (٢٦) \quad ١٠ + ٢ج - ٤د - ٦دج \quad (٢٧) \quad ٢ع٢ص - ٢ص٢ - ٧ + ٥ص٣$$

مثال ٣

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها:

$$(٢٨) \quad ٥س٢ - ٢ + ٣س \quad (٢٩) \quad ٨ص + ٧ص٣ \quad (٣٠) \quad ٤ - ٣ج - ٥ج٢$$

$$(٣١) \quad ٤د٤ - ١ + ٢د \quad (٣٢) \quad ٧ + ٤س - ٣س٤ \quad (٣٣) \quad ١٠ب - ٢ب١٠ - ٦ب$$

مثال ٤

(٣٤) **ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١ م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة $ع = ١٥٠ن٢ + ١٠٠٠ن + ١$

(أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

(ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟



(٣٥) **مشروع:** يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{1}{3}$ ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع (ع)، وحجم الأسطوانة يساوي ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع (ع).

(أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ.

(ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨ سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦ سم، ونصف قطر القاعدة ٣ سم، فما حجم الصاروخ؟



الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخيين يعملان بالوقود الصلب. وتبلغ كتلة المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٦) **تحديد:** إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثل العدد الصحيح الفردي، وفسر ذلك.

(٣٧) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسر إجابتك.

(٣٨) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية.

(٣٩) **اكتب:** فسر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟



تدريب على اختبار

(٤٠) إجابة قصيرة: إذا كان لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالاً من أحد المتاجر، واشترت أرزاً بـ ٥٩,٩٥ ريالاً، وعلبة جبن بـ ١٥,٩٥ ريالاً. فكم تدفع مقابل ذلك؟

(٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟

$$٢س + ص = ١٩, ٤س - ٦ص = ٢$$

(أ) ٥ (ب) ٨ (ج) ٧ (د) ١٠

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (الدرس ٦-٢)

$$(٤٢) \frac{١٠(٤٠-٨)}{١٠(٤٠-٨)} \quad (٤٣) \frac{١٠(٤٠-٨)}{١٠(٤٠-٨)} \quad (٤٤) \frac{١٠(٤٠-٨)}{١٠(٤٠-٨)} \quad (٤٥) \frac{١٠(٤٠-٨)}{١٠(٤٠-٨)}$$

(٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١, ٣) والمعامد للمستقيم ص = س بصيغة الميل والمقطع. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كل عبارة فيما يأتي إن أمكن، وإلا فاكتب "في أبسط شكل":

$$(٤٧) ٧ب + ١٤ب - ١٠ب \quad (٤٨) ٥ت + ١٢ت - ٨ت \quad (٤٩) ٣ص + ٤ص + ٢ص \quad (٥٠) ٧هـ - ٧س + ٨ك$$

$$(٥١) ٢ن + ٣ن + ٣ن \quad (٥٢) ٢ل + \frac{ل}{٣} + ٢ل$$



جمع كثيرات الحدود وطرحها

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

تمثيل كثيرات الحدود	
<p>حدود متشابهة</p>	تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.
	يمكن تكوين الزوج الصفري بتجميع قطعة واحدة ومعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفر أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.

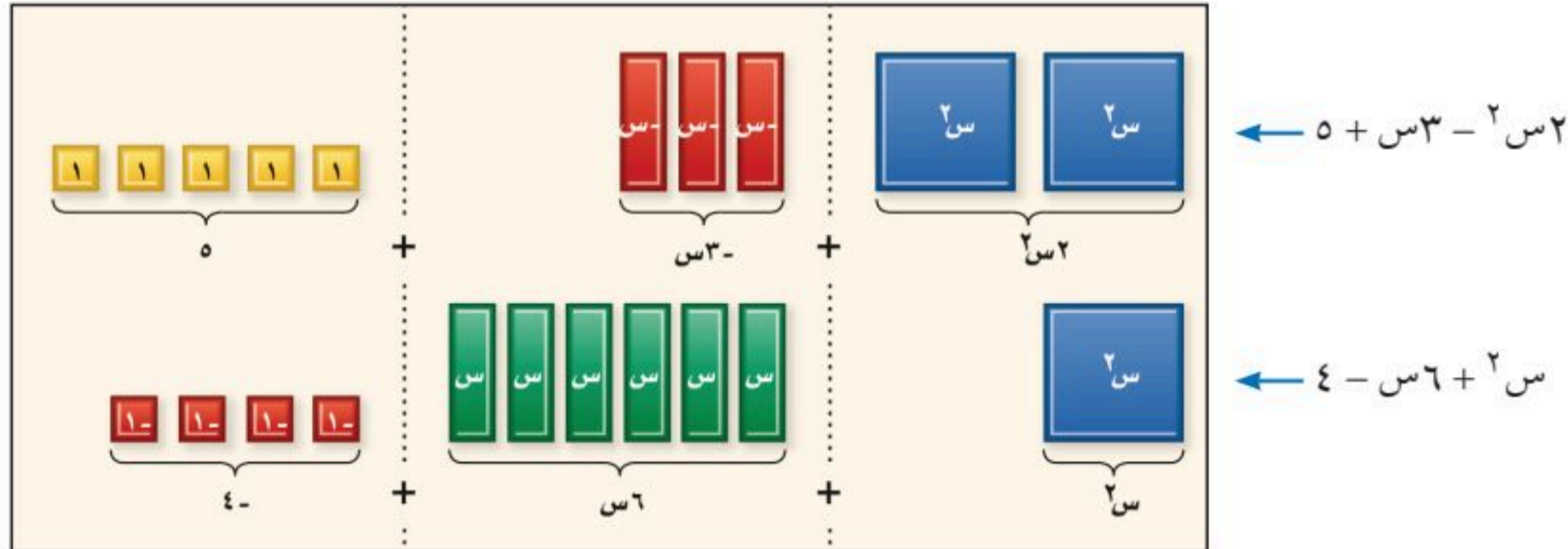
تُسمى وحيدات الحد مثل $٣س$ ، $-٢س$ حدودًا متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر- انظر الجدول المجاور.

نشاط ١

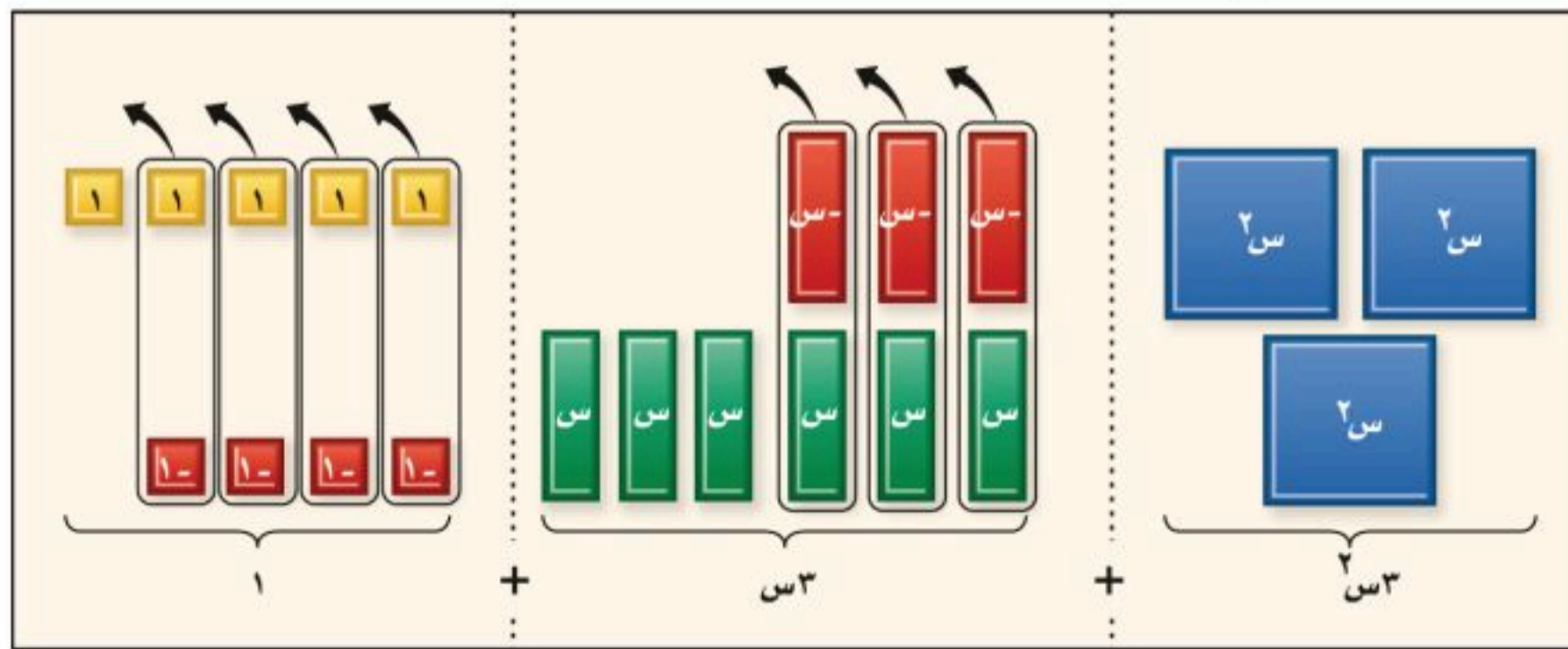
جمع كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٥ + ٣س - ٢س^٢) + (٤ - ٦س + ٢س^٢)$.

الخطوة ١: مثل كلاً من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جمّع الحدود المتشابهة، واحذف الأزواج الصفرية.



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$١ + ٣س + ٢س^٢ = (٤ - ٦س + ٢س^٢) + (٥ + ٣س - ٢س^٢)$$



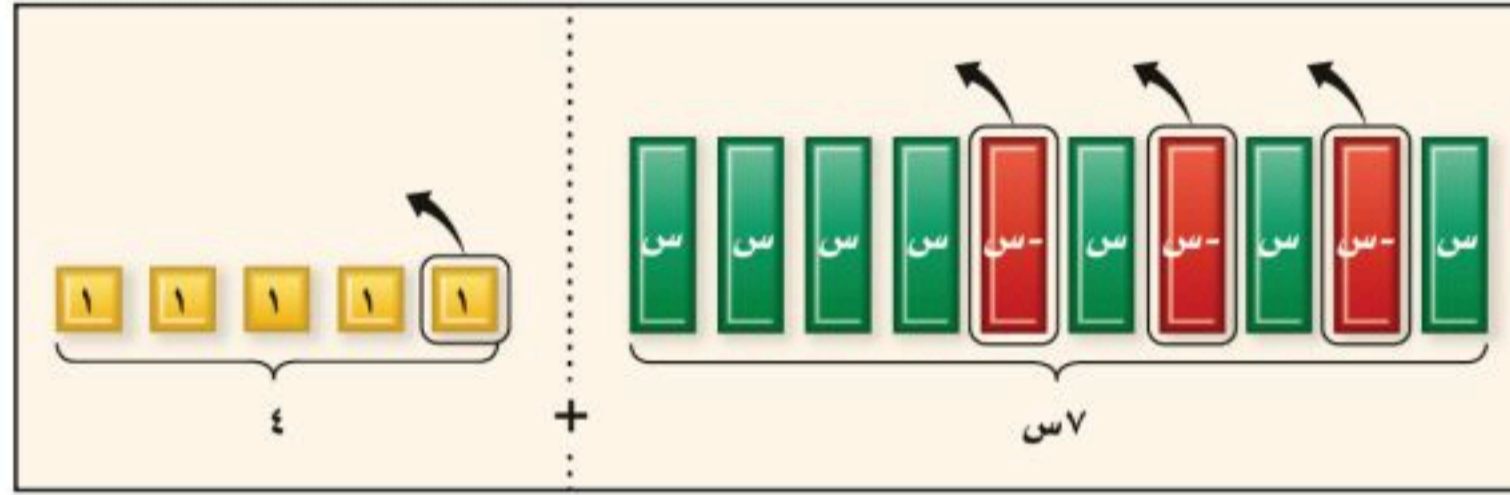
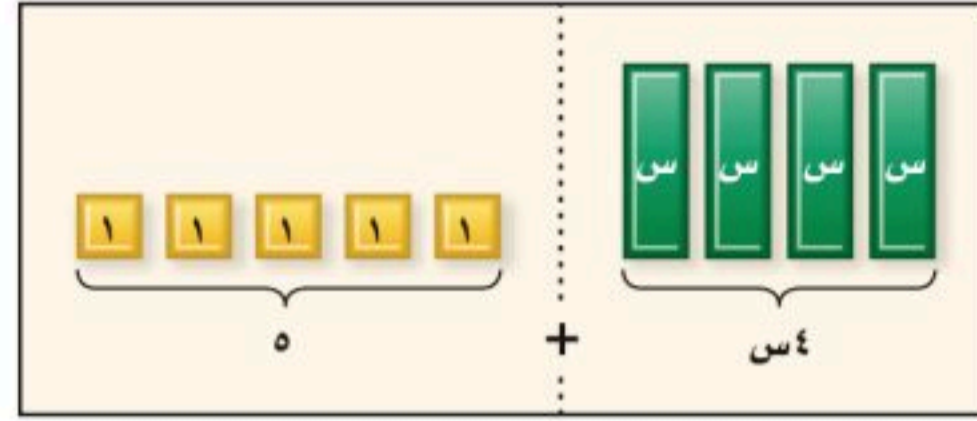
وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(-3س + 1) - (4س + 5)$.

الخطوة ١: مثل كثيرة الحدود: $4س + 5$



الخطوة ٢: لطرح $-3س + 1$ عليك حذف ٣ بطاقات $(-س)$ الحمراء، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وبما أنه لا توجد بطاقات $(-س)$. أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات $(-س)$ و $(-س)$ ، ثم احذف ٣ بطاقات $(-س)$.

الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$\text{إذن } 4س + 5 = (-3س + 1) - (4س + 5)$$

تذكر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

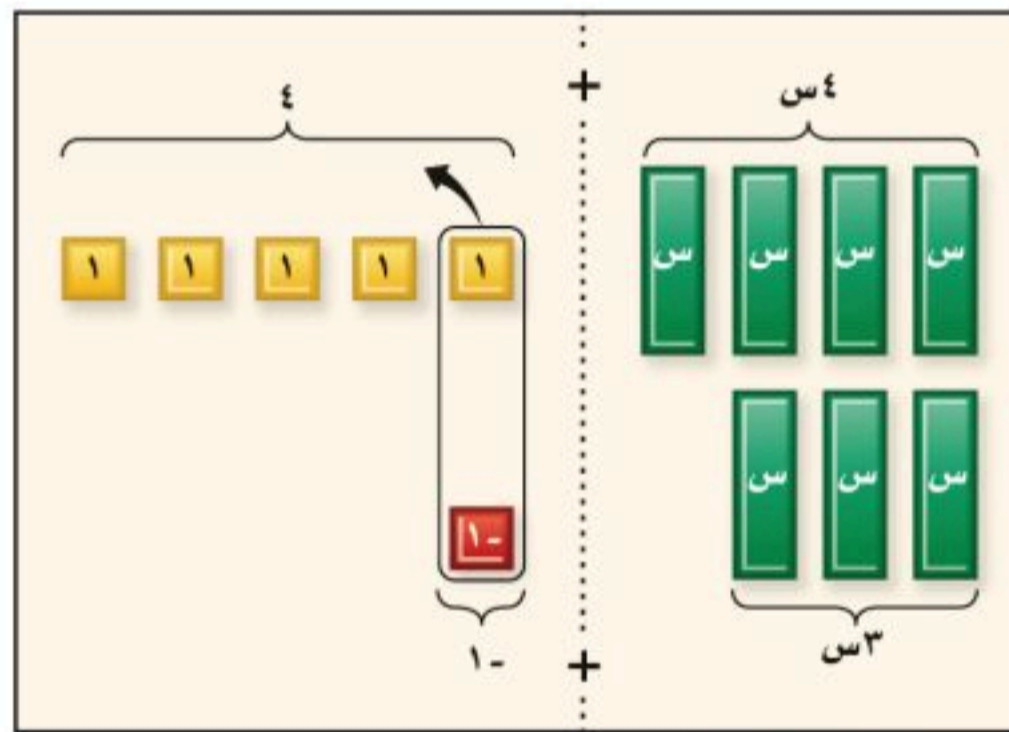
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: $(-3س + 1) - (4س + 5)$.

الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين $4س + 5$ ، $-3س + 1$ ، أضف $4س + 5$ إلى معكوس $-3س + 1$

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$\text{إذن } 4س + 5 = (-3س + 1) - (4س + 5)$$

لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.



$$\leftarrow 4س + 5$$

$$\leftarrow \text{معكوس } -3س + 1 \text{ هو } 1 - 3س$$

التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكل مما يأتي:

$$(1) (س^2 + 5س - 2) + (2س^3 - 2س + 6)$$

$$(2) (2س^2 + 8س + 1) - (2س^4 - 4س - 2)$$

$$(3) (-4س^2 + 2س) - (س + 5س)$$

(٤) **اكتب:** أوجد ناتج $(4س^2 - 2س + 3) - (2س + 1)$ باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و ٣. ومثل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفرية في كل حالة.





جمع كثيرات الحدود وطرحها

لماذا؟

يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل (١٤) وحجاج الخارج (٢٤) بمئات الألوف من عام ١٤٣٥ هـ إلى ١٤٣٨ هـ بالمعادلتين:
 $١٤ = ١٩٣١ + ٢٨٤١ - ٣٠٠$, $٢٤ = ١٨٠٨ + ٢٠٠$, $٦, ٧ + ٢٠٠$
 $٢٤ = ٢٦٧٥ + ٢٠٠ - ٣٠٠$, $١, ٠٢ + ٢٠٠$, $٩٧ + ٢٠٠$, $١٧, ٠٨ + ٢٠٠$
 حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٥ هـ.
 إن إجمالي عدد الحجاج تقريباً يمثل $٢٤ + ١٤$

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن جمع كثيرتي حدود باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

مثال ١ جمع كثيرات الحدود

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(i) (٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س٤ + ٦س)$$

الطريقة الأفقية

$$(٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س٤ + ٦س) = [٢س٢ + ٥س - ٧] + [٣ - ٤س٤ + ٦س] = ٢س٢ + ٥س - ١١س + ٤ - ٧ = ٢س٢ - ٦س + ٤ - ٧ = ٢س٢ - ٦س - ٣$$

جمع الحدود المتشابهة

اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

$$\begin{array}{r} ٢س٢ + ٥س - ٧ \\ + \quad ٣ - ٤س٤ + ٦س \\ \hline ٢س٢ - ٦س - ٣ \end{array}$$

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمع

$$(b) (٨ + ٣ص٢ + ٤ص - ٤ص٤) + (٥ - ٣ص + ٣ص٣)$$

الطريقة الأفقية

$$(٨ + ٣ص٢ + ٤ص - ٤ص٤) + (٥ - ٣ص + ٣ص٣) = [٨ + ٣ص٢ + ٤ص - ٤ص٤] + [٥ - ٣ص + ٣ص٣] = ٨ + ٣ص٢ + ٤ص - ٤ص٤ + ٥ - ٣ص + ٣ص٣ = ١٣ + ٣ص٢ + ١ص - ٤ص٤ + ٣ص٣$$

جمع الحدود المتشابهة

اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

$$\begin{array}{r} ٨ + ٣ص٢ + ٤ص - ٤ص٤ \\ + \quad ٥ - ٣ص + ٣ص٣ \\ \hline ١٣ + ٣ص٢ + ١ص - ٤ص٤ + ٣ص٣ \end{array}$$

أضف الحد $٣ص٢$ للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمعها



تحقق من فهمك

$$(أ) (٥س٢ - ٣س٣ + ٤) + (٦س - ٣س٣ - ٢) \\ (ب) (ص٣ - ٤ص + ٧) + (٢ص٣ + ٢ص - ٤ص - ١١)$$

طرح كثيرات الحدود: تذكر أنه يمكنك طرح عدد صحيح بإضافة معكوسه أو نظيره الجمعي. وبالمثل، يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي. لإيجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

$$-(٣س٣ + ٢س - ٦) = ٦ + ٢س - ٣س٣ \\ \text{نظير جمعي}$$

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

عند إيجاد النظير الجمعي أو المعكوس لكثيرة حدود، اضرب كل حد فيها في العدد -١.

مثال ٢ طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٢ك٣ + ٩ - ٢ك)$

الطريقة الأفقية

اطرح $٢ك٣ + ٩ - ٢ك$ بإضافة نظيرها الجمعي

$$(٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٢ك٣ + ٩ - ٢ك)$$

$$= (٧ك + ٤ك٣ - ٨) + (-٢ك٣ - ٩ + ٢ك) \\ \text{النظير الجمعي لـ } (٢ك٣ + ٩ - ٢ك) \text{ هو } (-٢ك٣ - ٩ + ٢ك)$$

$$= [٧ك + ٤ك٣] + [٤ك٣ - ٢ك٣] + [٨ - ٩] + [٢ك - ٢ك]$$

$$= ٤ك٣ - ٢ك٣ + ١٦ك - ١٠$$

اجمع الحدود المتشابهة ورتب.

الطريقة الرأسية

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واطرح بإضافة النظير الجمعي.

$$٤ك٣ - ٢ك٣ + ١٦ك - ١٠$$

$$٤ك٣ + ٢ك٣ + ١٦ك - ١٠$$

$$٢ك٣ - ٩ + ٢ك \quad (+)$$

$$٢ك٣ - ٩ + ٢ك \quad (-)$$

$$٤ك٣ - ٢ك٣ + ١٦ك - ١٠$$

$$\text{إذن: } (٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٢ك٣ + ٩ - ٢ك) = ٤ك٣ - ٢ك٣ + ١٦ك - ١٠$$

تحقق من فهمك

$$(أ) (٤س٣ - ٣س٣ + ٢س٦ - ٤) - (٢س٣ + ٣س٣ - ٢س٢)$$

$$(ب) (٨ص - ١٠ص + ٥ص٢) - (٧ص - ٣ص٣ + ١٢ص)$$



مثال ٣ من واقع الحياة

جمع كثيرات الحدود وطرحها

متجر إلكترونيات: تمثل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

(أ) اكتب معادلة تمثل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهريًا.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

$$٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨ = ن$$

$$١١ش + ٢١٥ = ن$$

$$المعادلة هي: ن = ١١ش + ٢١٥$$

(ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستباع في ١٠ أشهر.

$$ن = ١١(١٠) + ٢١٥$$

$$٣٢٥ = ٢١٥ + ١١٠$$

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلة تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك ✓

(٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهريًا ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهرًا.

الربط مع الحياة

مع تطوُّر التقنيات السريعة، تشهد السوق ارتفاعًا كبيرًا في مبيعات آلات التصوير الرقمية والهواتف المحمولة.

تأكد ✓

المثالان ٢، ١

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(١) (٦س٣ - ٤) + (-٢س٣ + ٩)$$

$$(٢) (ج٣ - ٢ج٢ + ٥ج + ٦) - (ج٢ + ٢ج - ٢)$$

$$(٣) (٨ص - ٤ص٢) + (٣ص - ٩ص٢)$$

$$(٤) (-٤ع٣ - ٢ع + ٨) - (٤ع٣ + ٣ع - ٥)$$

$$(٥) (-٣د٣ - ٨د + ٢) + (د٢ + ٤د - ١٢)$$

$$(٦) (٣ن٣ - ٥ن + ٢) - (-٢ن٣ + ٨ن + ٣)$$

مثال ٣

(٧) **إجازة:** يتوزع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال الإجازة إلى مجموعتين: مجموعة

تسافر إلى المنطقة (ف) بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة (د) بالسيارة، ويمكن تمثيل

العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال الإجازة، وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا

للمنطقة (ف) بالمعادلتين: ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٧ + ٨ن، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٢٥ هـ.

(أ) اكتب المعادلة التي تمثل عدد الطلاب (ل) الذين توجهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة.

(ب) كم طالبًا يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٤٢ هـ؟

(ج) كم طالبًا يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٤٥ هـ؟



وزارة التعليم

الدرس ٦-٤: جمع كثيرات الحدود وطرحها

٣٣
2025 - 1447

المثالان ١، ٢

أوجد ناتج كل مما يأتي:

(٨) $(ص + ٥) + (ص٢ + ٤ص - ٢)$ (٩) $(٣ج - ٣ج - ١١) - (ج٢ + ٢ج + ٨)$

(١٠) $(ع + ٢ع) + (ع - ٢)$ (١١) $(٢س - ٢ص + ١) - (٣ص + ٤س)$

(١٢) $(٤ - أ - ٥ب + ٢) + (٣ + ٢ب - ٦)$ (١٣) $(س٢ص - ٣ص + ٢ص) + (ص٢ - ٣ص + ٢ص)$

(١٤) $(٦أ + ٢أ) + (٣أ - ٢أ + ٤أ - ٦)$ (١٥) $(ج٢ + ٢ج - ٤ج + ٦) + (٤ج - ٢ج + ٢ج - ٤ج)$

(١٦) $(٣ن + ٣ - ١٠) - (٤ن - ٢ن) + (٤ن - ٣ن - ٢ن + ٩)$

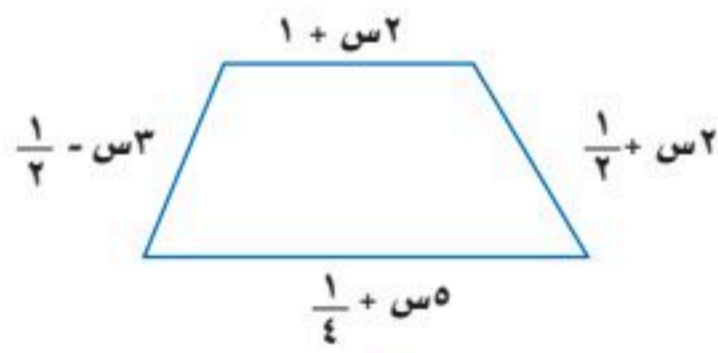
(١٧) **مبيعات:** يُقدّر متجر بيع إلكترونيات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعلاقة $٤٢ - ١س + ٢١٢٨س + ١٥٠٠$ ، وأن الربح من بيع س تلفازاً هو $٧٥س$ ، حيث س بين صفر و ٨٠٠ .
 (أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة.
 (ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازاً؟

مثال ٣

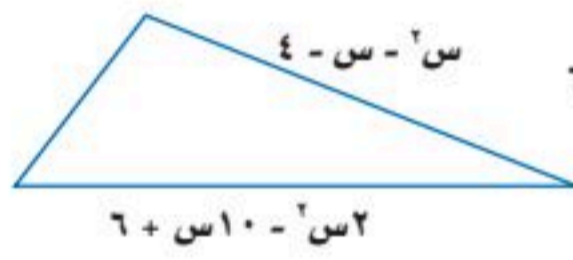


الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي لجهاز التلفاز LCD هو ٦٠٠٠٠ ساعة. مما يعني استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا عمل أقل من ٨ ساعات يومياً.



(١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثل محيط الشكل المجاور.



(١٩) **هندسة:** تمثل العبارة $٣س - ٧س + ٢$ محيط الشكل المقابل. اكتب كثيرة حدود تمثل قياس الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: $(٢س - ٢س) - (٣س + ٢س - ٢)$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

سلطان
 $(٢س - ٢س) - (٣س + ٢س - ٢) =$
 $(٢س - ٢س) + (٣س - ٢س) =$
 $٢س - ٢س + ٤س =$

ثامر
 $(٢س - ٢س) - (٣س + ٢س - ٢) =$
 $(٢س - ٢س) + (٣س - ٢س) =$
 $٢س - ٢س - ٤س =$

(٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما $٣س - ٧س + ٨$.

(٢٢) **تبرير:** أوجد مثلاً مضاداً للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

(٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية. وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟



تدريب على اختبار

(٢٥) إجابة قصيرة: ما محيط مربع طول ضلعه $(٣ + ٢)$ وحدة؟

(٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: $س، س + ١، س + ٢$. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟

(أ) $س(س + ١)(س + ٢)$ (ب) $٣س + ٣$

(ج) $٣س + ٣$ (د) $٣س + ٣$

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

(٢٦) ٢٥ (٢٧) $٣ن + ٦و$ (٢٨) $٢ + ٣أب - ٣أ + ٤ب + ٦أ٤$ (٢٩) $٦ - ك + ك٢ + ك٣ + ٦ك٣$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

(٣٠) $٣(٢ن - ٣)$ (٣١) $(٨ - ٤ع)(٥ع - ٤)$ (٣٢) $(٦ص - ٢ص٢)(٢ص - ٢ص٢)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلاً ممّا يأتي:

(٣٣) $ل(ل٥)(ل٧)$

(٣٥) $(٥ت٥ف)(٢ت١٠ف٣)$

(٣٧) $٣(٢٣)$

(٣٩) $(٢م٤ك٣)(٣م٣ك٢)$

(٣٤) $٣(٢ن - ٣)$

(٣٦) $(٨ - ٤ه٤)(٥ه٤ - ٤)$

(٣٨) $٢(٣٢)$

(٤٠) $(٦صع)(٢ص٢ع٢ز٢)$



حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حدّ، أو ثلاثية حدود:

(الدرس ٦-٣)

(١١) $٣ص٢ - ٢$

(١٢) $٤ت٥ + ٣ت٢ + ت$

(١٣) $\frac{٣س}{٥ص}$

(١٤) $٣- ب س$

(١٥) $٣ ب$

(١٦) $٢ س٣ - ٤س٤ + ١$

(١٧) **كثافة سكانية:** الجدول أدناه يبيّن كثافة عدد السكان في

إحدى المدن. (الدرس ٦-٣)

الكثافة شخص / ميل مربع	عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م	العام
١	٠	١٩٤٠
١,٧	٣٠	١٩٧٠
٧,٢	٥٠	١٩٩٠
١١,٤	٦٠	٢٠٠٠

(أ) إذا كانت الدالة: د(س) = $٠,٠٠٥س٠ - ١٢٧س٢ + ١$ تمثل الكثافة السكانية، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م، فحدّد نوع كثيرة الحدود.

(ب) حدّد درجة كثيرة الحدود.

(ج) استعمل الدالة لتوقع الكثافة السكانية لعام ٢٠٣٠م مبيّنًا خطوات الحل.

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

(١٨) $(٣ل٨ - ٢ل٩ + ل٥ + ٣) + (٣ل٢ + ل - ٢ل٢)$

(١٩) $(٥س - ٣س٣ + ٢س٧) - (٢س٣ + ٣س)$

(٢٠) $(٧ه٤ - ٢ه٢) - (٢ه٣ + ٢ه٤)$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس ٦-١)

(١) $(٣س٤) (٤س٥)$

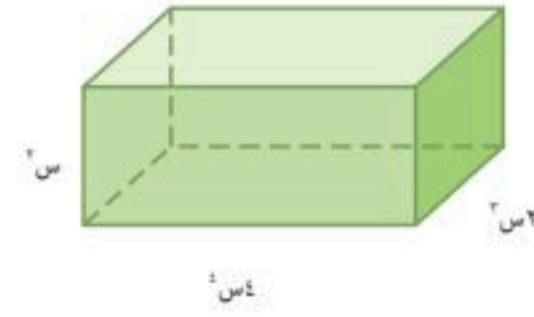
(٢) $(٢م٥) (٣)$

(٣) $[٢(٣ص٣)]$

(٤) $(٦أ٣ج٤) (-٣أ٢ب٣ج)$

(٥) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسم أدناه في صورة

وحيدة حدّ: (الدرس ٦-١)



(ج) $٨س٢٤$

(أ) $٦س٩$

(د) $٧س٢٤$

(ب) $٨س٩$

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

(الدرس ٦-٢)

(٦) $\left(\frac{٣٤٢ب٣}{٦ج٦}\right)$

(٧) $\frac{٢س٢ص٣}{٦س}$

(٨) $\frac{٧م٤ن٤ب}{٣م٣ن٣ب}$

(٩) $\frac{٢ه٤ه٤ر}{٥-}$

(١٠) **علم الفلك:** يُقدّر علماء الفلك رتبة عدد النجوم في الكون

بـ $١٠^{٢١}$ ، ورتبة عدد النجوم في درب التبانة بحوالي ١٠٠

مليار، فكم مرة تساوي رتبة عدد النجوم في الكون من رتبة

عدد نجوم درب التبانة؟ (الدرس ٦-٢)





ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

لماذا؟

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.



يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها؛ أي أن مساحة أرض القاعة تعطى بالعلاقة ض (٣ + ٣).
ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال ١ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $-٣س٣ - (٧س٢ - س + ٤)$.

الطريقة الأفقية:

$$\begin{aligned} & -٣س٣ - (٧س٢ - س + ٤) \\ \text{العبارة الأصلية} & \\ \text{خاصية التوزيع} & -٣س٣ - (٧س٢ - س + ٤) = \\ \text{اضرب} & -٣س٣ - (٧س٢ - س + ٤) = \\ \text{بسط} & -٣س٣ - ٧س٢ + س - ٤ = \end{aligned}$$

الطريقة الرأسية:

$$\begin{array}{r} ٧س٢ - س + ٤ \\ \times -٣س٣ \\ \hline -٢١س٤ - ٣س٣ + ١٢س٢ \end{array}$$

خاصية التوزيع
اضرب

تحقق من فهمك ✓

$$(أ) ١٥٠ - (٤٠ - ١٢ + ٢٤) \quad (ب) ٦٣ - (٣٣ - ٤٣ - ٢٤ + ٩)$$

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود.

مثال ٢ تبسيط العبارات

بسط $١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢)$.

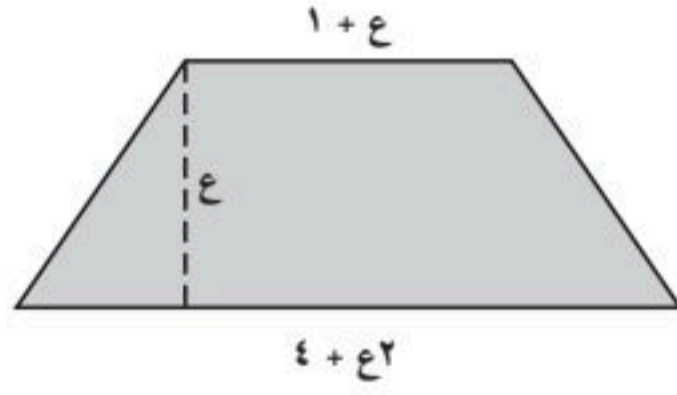
$$\begin{aligned} & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) \\ \text{العبارة الأصلية} & \\ \text{خاصية التوزيع} & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) = \\ \text{اضرب} & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) = \\ \text{خاصية التجميع} & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) = \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) = \\ & ١٢(٤ - ٥) - (٥ + ٢٤) - (٢٠ + ٢٢) = \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(أ) 3(5س^2 + 2س - 4) - س(7س^2 + 2س - 3)$$
$$(ب) 15ن(10ص^3 + 5ص^2) - 2ص(4ص^2 + 2ص)$$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من اختبار



لوحة جدارية: غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤ سم. فكم ستمتراً مربعاً من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.

اقرأ الفقرة:

يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولاً قاعدتيه ١ + ع، ٤ + ع٢ وارتفاعه ع.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثل مساحة شبه المنحرف.

لتكن ق١ = ١ + ع، ق٢ = ٤ + ع٢، ارتفاع شبه المنحرف.

$$م = \frac{1}{2}ع(ق١ + ق٢)$$

مساحة شبه المنحرف

$$= \frac{1}{2}ع[(١ + ع) + (٤ + ع٢)]$$

$$ق١ = ١ + ع، ق٢ = ٤ + ع٢$$

اجمع ثم بسّط

$$= \frac{1}{2}ع(٥ + ع٣)$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{٥}{٢}ع + \frac{٣}{٢}ع٣$$

$$ع = ٤٤$$

$$= \frac{٥}{٢}(٤٤) + \frac{٣}{٢}(٤٤)٣$$

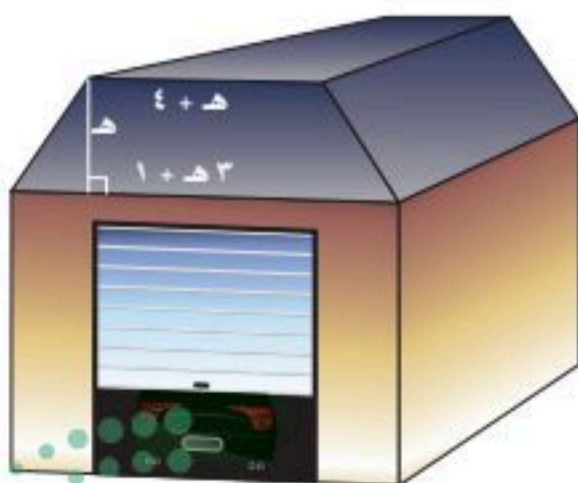
بسّط

$$= ٣٠١٤$$

إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^٢ من الورق الذهبي.

تحقق من فهمك

(٣) **مرآب:** يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف. إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب.



حل معادلات تتضمن كثيرة حدود : تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

مثال ٤

معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

حل المعادلة: $٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$

المعادلة الأصلية	$٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$
خاصية التوزيع	$٥٠ + أ٨ - ٦أ٢ + أ + ٤أ = ٨ + ٦أ٣ + ٢أ٦ + أ٤ - ١٠أ٢$
اجمع الحدود المتشابهة	$٥٠ + أ٧ - ٦أ٢ = ٨ + ٦أ٣ + ١٤أ - ١٠أ٢$
اطرح ١٦ من كلا الطرفين	$٥٠ + أ٧ - ٨ = ٨ + ٦أ٣$
أضف ٨ إلى كلا الطرفين	$٥٠ = ٨ + ٦أ٣$
اطرح ٨ من كلا الطرفين	$٤٢ = ٦أ٣$
اقسم كلا الطرفين على ٦	$٧ = أ٣$

تحقق :

بسط	$٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$
اضرب	$٥٠ + [٤ - (٦)أ]أ٢ + [١ + (٤)أ]أ = ٨ + [٦ + (٢)أ]أ٣ + [٢ - (٥)أ]أ٢$
اجمع	$٥٠ + (٨)أ٢ + (٩)أ = ٨ + (١٠)أ٣ + (٨)أ٢$
	$٥٠ + ٣٢ + ١٨ = ٨ + ٦٠ + ٣٢$
	$١٠٠ = ١٠٠$

تحقق من فهمك

(أ٤) $٢س(س + ٤) = ٧ + (س + ٨)$

(ب٤) $د(د + ٣) - د(د - ٤) = ٩ - ١٦$

إرشادات للدراسة

جمع الحدود المتشابهة

إذا أردت تبسيط عبارة تحوي الكثير من الحدود، فقد يساعدك على ذلك وضع دوائر حول أحد مجموعات الحدود المتشابهة ومستطيلات حول عناصر مجموعة أخرى، ومثلثات حول عناصر مجموعة ثالثة، وهكذا.

تأكد

مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١) $٥ن(٤ - ٢ن + ٣ن٢)$

(٢) $٦ج(٣ج٢ + ٤ج + ١٠ج - ١)$

(٣) $٣ر٤ل٣ - ٤ر٢ل٢ - ٣ر٦ل٦ - ٥$

(٤) $٢أب(٧أ٤ب + ٢أ٥ب - أ٢)$

مثال ٢

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(٥) $٥ن(٤ن + ١٥) - ٤(٤ - ٣ن)$

(٦) $٦س(٣س + ٤) + ٢(٧س - ٣)$

(٧) $٢د(د٣ج - ٢ج٤ - ٤دج٢ + ٢د٢ج) + ٢ج(دج٢ - ٢د٣)$

مثال ٣

(٨) **تلفاز:** اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات.

مثال ٤

حلّ كلًا من المعادلات الآتية:

(٩) $٦(١١ - ٢ج) = ٧(٢ - ٢ج)$

(١٠) $٢ن(٣ - ن) = ٢٠ + (٣ + ن٢)$

(١١) $أ(٣ + أ) + أ(٦ - أ) = ٣٥ + أ(٥ - أ) + أ(٧ + أ)$



مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(13) \quad 2ج^2(5ج^3 - 15ج^2 + 2ج + 2) \quad (12) \quad ب(ب^2 - 12ب + 1)$$

$$(15) \quad 4ل^3(2ل^2 - 10ل + 2) \quad (14) \quad 2ر^2(2ر + 5ر^2 - 15ب)$$

مثال ٢ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(16) \quad 3(5س^2 + 2س + 9) + س(2س - 3) \quad (17) \quad 3(6 - 2أ) + (4 + 2أ + 2أ8 - 4)$$

$$(18) \quad 4(5د^2 - 12) + 7(د + 5) \quad (19) \quad 9ج(-2ج + 2) + 3(ج^2 + 4)$$

$$(20) \quad 4ن(2ن^2ب^3 - 3ن^2ب + 5ن) + 4ب(6ن^2ب - 2ن^2ب + 3ب)$$



مثال ٣ (٢١) سدود: واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية

مثلاً ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{1}{5}$ ارتفاعها بـ ١٠ أمتار.

(أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة.

(ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ متراً، فأوجد هذه المساحة.

مثال ٤ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$$(22) \quad 7(2ن + 5 - 9) + ن = ن(2 - 7) + 13$$

$$(23) \quad 5(4ع + 6) - 2(ع - 4) = 7ع(ع + 4) - 8(ع - 2)$$

$$(24) \quad 9ج(ج - 11) + 10(ج - 3) = 3ج(ج + 5) + 6ج(ج - 3) - 30$$

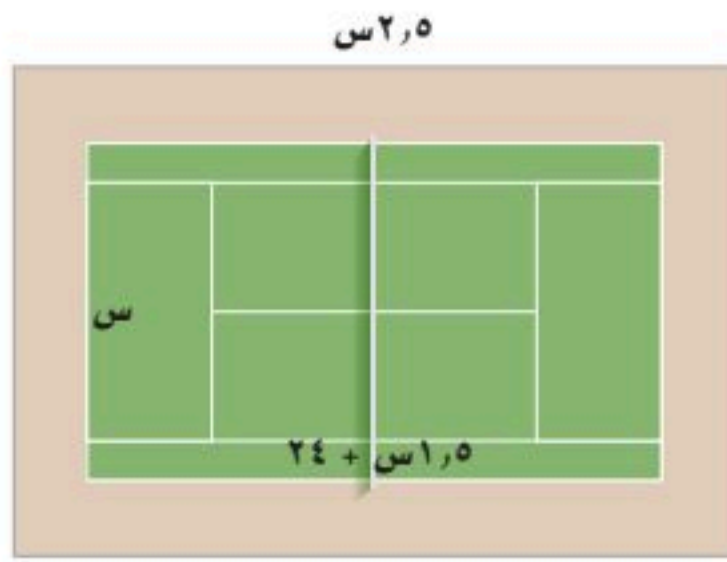
$$(25) \quad 2ن(2 - 5) - 10(ن^2 - 3ن + 6) = 8ن(ن + 4) + 4(2ن^2 - 7ن)$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(26) \quad \frac{2}{3}ن(30ب^2 + 9ن^2ب - 12) \quad (27) \quad \frac{3}{5}ر^2(10ر^3 + 5رل^3 + 15ل^2)$$

$$(28) \quad -س^2(2ع^2 + 4س^2ع + 3) + س^2(5س^3ع + 3س^2ع + 4س^2ع)$$





- (٢٩) **تنس أرضي:** يبني نادي التنس ملعباً جديداً يحيط به ممر منتظم، كما في الشكل المجاور.
- (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة ملعب التنس.
- (ب) اكتب عبارة تمثل مساحة الممر.



الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصّف ملعباً مستطيلاً. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقُّع اتجاه الكرة.

- (٣٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

(أ) **جدولياً:** اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدد درجة ناتج الضرب. وأخيراً سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

وحيدة الحد	الدرجة	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

- (ب) **لفظياً:** خمن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٣١) **تحّد:** أوجد قيمة ب التي تجعل $3س^3 = (4س^2 + 3س + 2س^3 - 2) = 12س^{12} + 6س^{10}$
- (٣٢) **تبرير:** هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: $(س + 2)^2 = 2س^2 + 2$ صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفسّر إجابتك.
- (٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما.
- (٣٤) **اكتب:** صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

(٣٦) إذا كانت $أ = 5س + 7ص$ ، $ب = 2ص - 3س$ ، فأوجد $أ + ب$

- (أ) $2س - 9ص$ (ج) $2س + 9ص$
- (ب) $3ص + 4س$ (د) $2س - 5ص$

(٣٥) يبيع محل ملابس م بنظراً، ن قميصاً أسبوعياً، فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالاً، والبنطال ١٢٠ ريالاً. فأأي العبارات الآتية تمثل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمناً لذلك؟

- (أ) $٨٠م + ١٢٠ن$ (ج) $٢٠٠(م + ن)$
- (ب) $١٢٠م + ٨٠ن$ (د) $٩٦٠٠م ن$



مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

$$(37) (3^2 + 2^2 - 1) + (6 - 2) \quad (38) (7 + 2^2) - (4 + 2^3 - 3^2) \quad (39) (9 + 3^2) - (2 - 3 + 2^2 - 3^2 - 8)$$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

$$(40) 12 \text{ ص} \quad (41) 10 - \quad (42) 3 - 4 \text{ ر}^5 \text{ ن}^2$$

بسِّط كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-١)

$$(43) - \text{ص}^4 - (2 \text{ ص}^3) \quad (44) 2 \text{ م}^2 - (4 \text{ م}^4) - (3 - 5 \text{ م}^3) \quad (45) 4 \text{ ب}^2 - (2 \text{ ب}^3) + 2 \text{ ب}^4 + (5 \text{ ب}^6)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلاً مما يأتي:

$$(46) \text{ ب} (2 \text{ ب}) (3 \text{ ب}) \quad (47) 2 \text{ ص} (3 \text{ ص}^2) \quad (48) - \text{ص}^4 - (2 \text{ ص}^3) \quad (49) 3 \text{ ع}^3 - (5 \text{ ع}^4 + 2 \text{ ع}) \quad (50) 2 \text{ م}^2 - (4 \text{ م}^4) - (3 - 5 \text{ م}^3) \quad (51) 4 \text{ ب}^2 - (2 \text{ ب}^3) + 2 \text{ ب}^4 + (5 \text{ ب}^6)$$





٦-٦ ضرب كثيرات الحدود

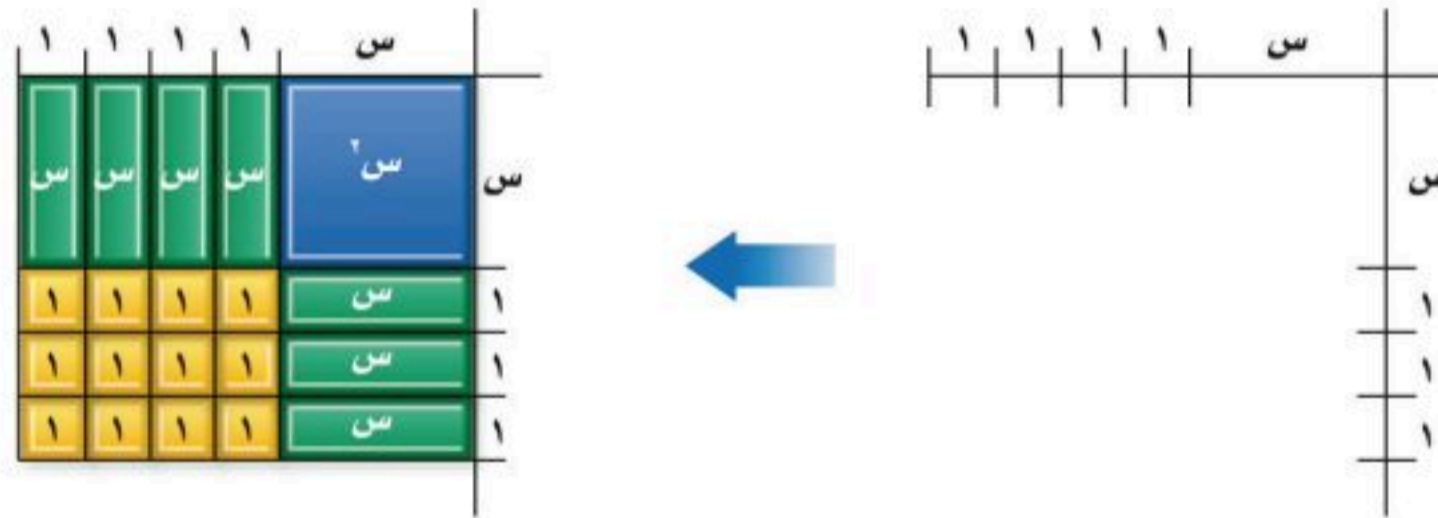
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائي حد

نشاط ١

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س + ٣)(س + ٤)$.

حدّد بعدي المستطيل: $س + ٣$ ، $س + ٤$ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات $س$ ، ١٢ بطاقة ١

وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي $س^٢ + ٧س + ١٢$

إذن $(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢$

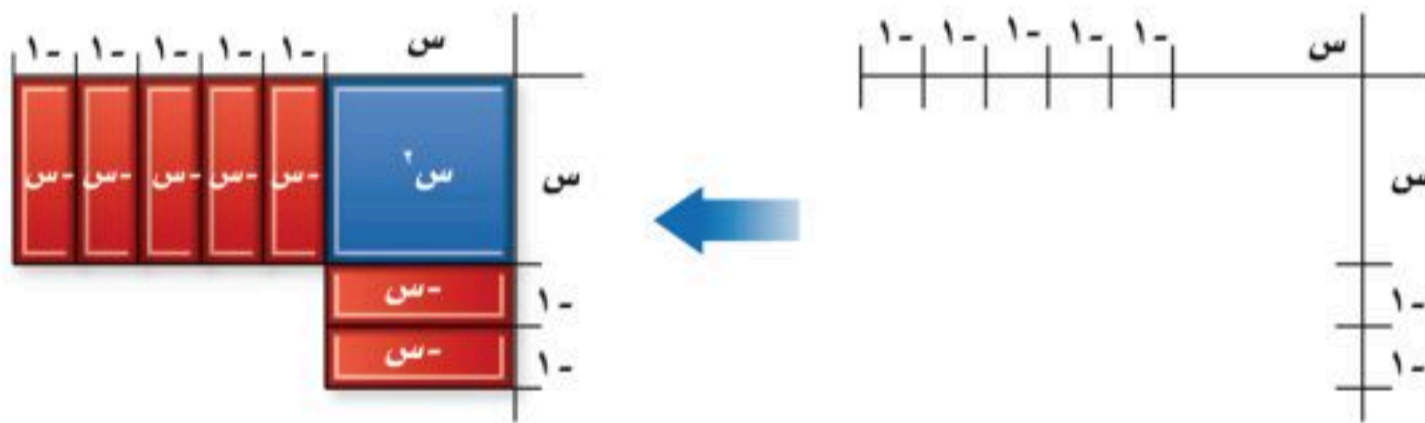
نشاط ٢ ضرب ثنائي حد

نشاط ٢

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س - ٢)(س - ٥)$.

الخطوة ١: حدّد بعدي المستطيل $س - ٢$ ، $س - ٥$

ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضح في الشكل المقابل.



الخطوة ٢: حدّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات -١ لتكملة المستطيل.

بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب -١ في -١، لذا املأ الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.

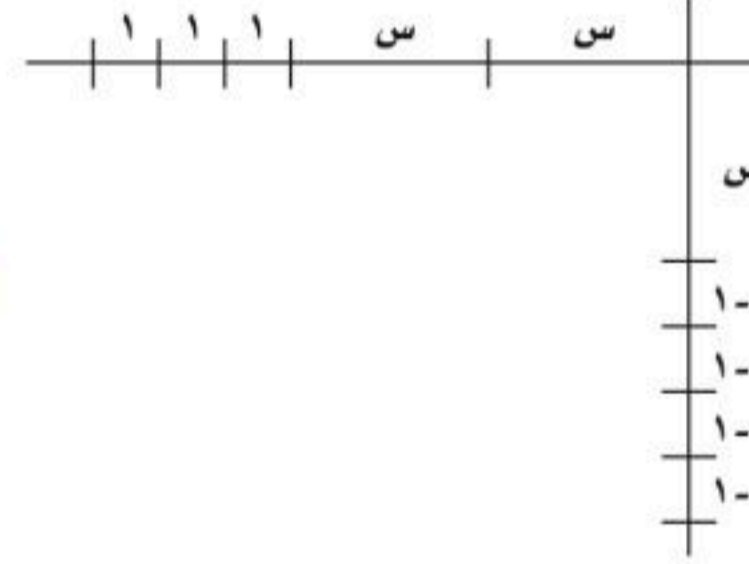
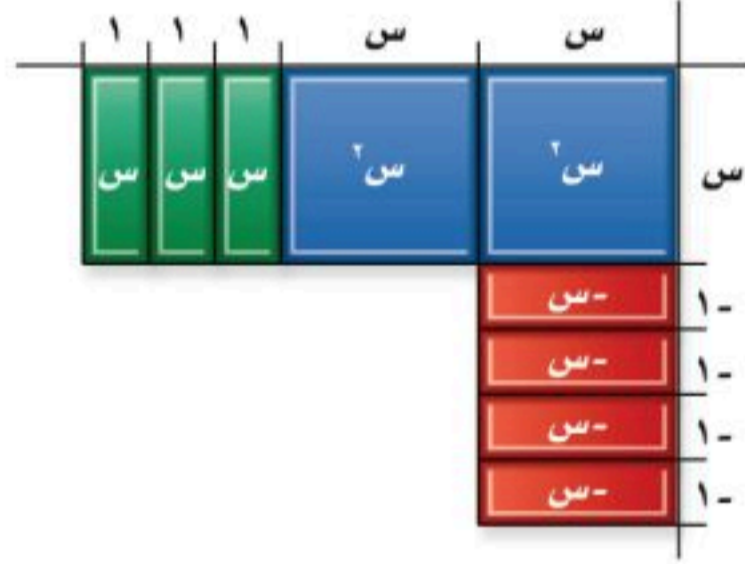
يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات - $س$ ، ١٠ بطاقات ١

فتكون مساحة المستطيل $س^٢ - ٧س + ١٠$.

لذا فإن $(س - ٢)(س - ٥) = س^٢ - ٧س + ١٠$

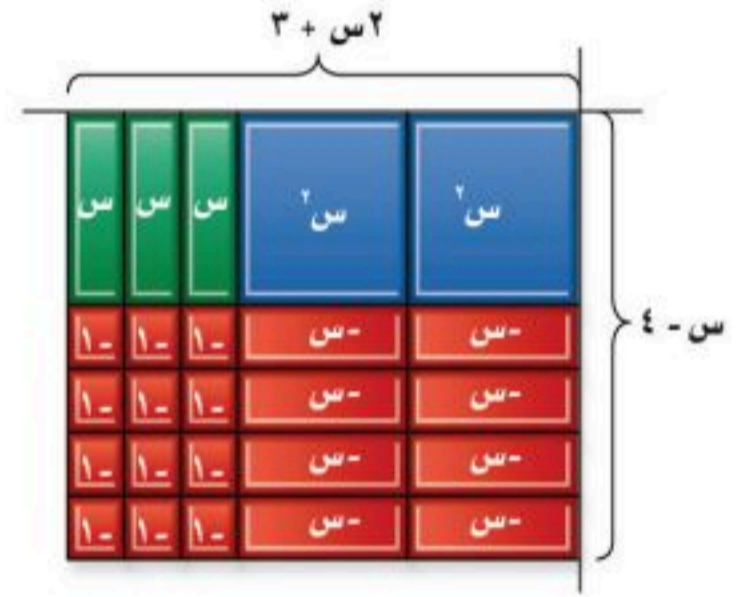
نشاط ٣ ضرب ثنائي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(4 - s)(3 + 2s)$.

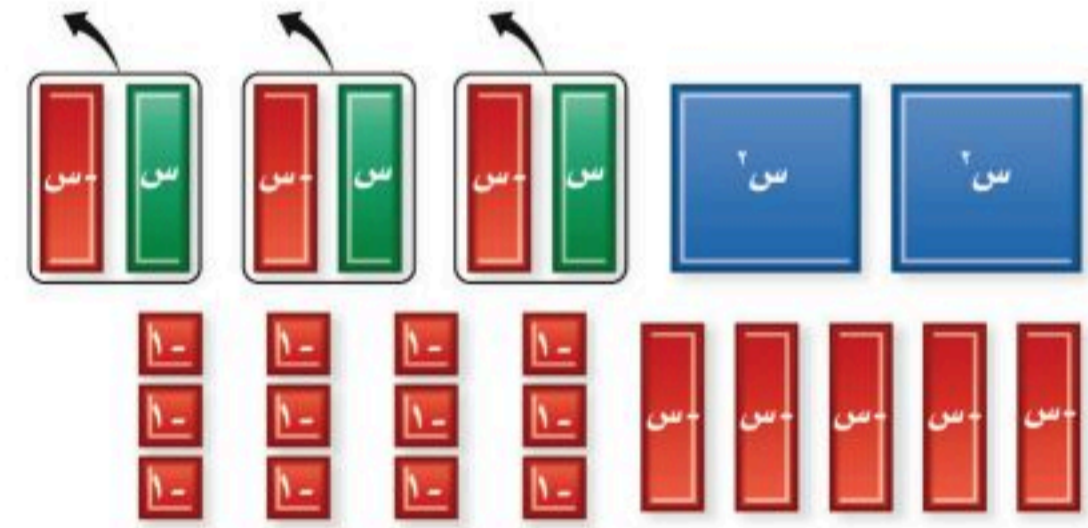


الخطوة ١: حدّد بُعدي المستطيل

س - ٤، ٢س + ٣. ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضح في الشكل المجاور.



الخطوة ٢: حدّد أي بطاقات الجبر س أم - س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم - ١ ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة - س هي حاصل ضرب س في - ١. والبطاقة ١- هي حاصل ضرب ١ في - ١. استعمل للمستطيل ثماني بطاقات - س، وثلاث بطاقات س و١٢ بطاقة - ١.



الخطوة ٣: أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها،

ولاحظ أن ٣ أزواج صفرية تشكّلت من ٣ بطاقات س، و٣ بطاقات - س. ويوجد بطاقتان س^٢، و٥ بطاقات - س، و ١٢ بطاقة - ١، إذن $(4 - s)(3 + 2s) = 2s^2 + 5s - 12$.

التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كلِّ مما يأتي:

$$(1) (1 + s)(4 + s) \quad (2) (3 - s)(2 - s) \quad (3) (5 + s)(1 - s)$$

$$(4) (2 + s)(3 + 2s) \quad (5) (1 - s)(1 - 2s) \quad (6) (4 + s)(5 - 2s)$$

(٧) هل العبارة $(3 + s)(5 + s) = 15 + 2s$ صواب أم خطأ؟ تحقّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.

(٨) **اكتب:** بيّن الشكل المجاور تمثيلاً لـ $(4 + s)(5 + s)$ مقسماً إلى ٤ أجزاء. فسّر كيف يظهر هذا التمثيل

استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.





ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟



لخياطة ثوب نستعمل قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بعدها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه. فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو $ع + ١٨٠$ وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافاً إليه ٢٧ سم، أو $ع + \frac{١}{٢}$. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج $(ع + ١٨٠) \left(ع + \frac{١}{٢}\right)$.

فيما سبق

درست ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المضردات

طريقة التوزيع بالترتيب
العبرة التربيعية

ضرب ثنائيتي حد: تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد مثل $ع + ١٨٠$ ، $ع + \frac{١}{٢}$. ويمكن ضرب ثنائيتي الحد أفقيًا أو رأسيًا.

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلِّ مما يأتي:

$$(أ) (٣ + س) (٥ + س)$$

الطريقة الرأسية

اضرب في س

$$٣ + س$$

$$٥ + س (X)$$

$$٢س + ٣س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٣ + س$$

$$٥ + س (X)$$

$$٢س + ٣س$$

$$١٥ + ١٠س$$

اضرب في ٥

$$٣ + س$$

$$٥ + س (X)$$

$$٢س + ٣س$$

$$١٥ + ١٠س$$

$$س(٣ + س) = ٣س + ٢س$$

$$٥(٣ + س) = ١٥ + ١٠س$$

الطريقة الأفقية:

$$(٣ + س) (٥ + س) = (٥ + س) ٣ + (٥ + س) ٢س$$

$$= ١٥ + ١٠س + ٣س + ٢س$$

$$= ١٥ + ١٣س + ٢س$$

اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

خاصية التوزيع

اجمع الحدود المتشابهة

$$(ب) (٢ - س) (٤ + س)$$

الطريقة الرأسية:

اضرب في ٣س

$$٢ - س$$

$$٤ + س (X)$$

$$٣س - ٢س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٢ - س$$

$$٤ + س (X)$$

$$٣س - ٢س$$

$$٨ - ٤س$$

$$٨ - ٤س$$

$$٣س(٢ - س) = ٣س - ٢س$$

$$٤(٢ - س) = ٨ - ٤س$$

الطريقة الأفقية :

$$\begin{aligned} (س - ٢)(٢ + ٣س) &= (س - ٢)(٢ + ٣س) - (س - ٢)(٤ + ٣س) \\ &= ٨ - ٦س - ٤س + ٢س^٢ \\ &= ٨ - ٢س - ٢س^٢ \end{aligned}$$

اكتبها كفرق بين حاصل ضرب
خاصية التوزيع
اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(أ) (١١) (٤ + م)(٥ + م) \quad (ب) (٨ + ص)(٢ - ص)(٥ - ص)$$

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائي حد بطريقة التوزيع بالترتيب.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

طريقة التوزيع بالترتيب

قراءة الرياضيات

التعبير اللفظي: لضرب ثنائي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثال:

ناتج ضرب الحدين الأخيرين	ناتج ضرب الحدين الأوسطين	ناتج ضرب الحدين في الطرفين	ناتج ضرب الحدين الأولين	مثال
↓	↓	↓	↓	
$(٢-)(٤)$	$(س)(٤)$	$(٢-)(س)$	$(س)(س)$	$(س - ٢)(٤ + س)$
$+ + + +$				$=$
$٨ - ٦س - ٤س + ٢س^٢$				$=$
$٨ - ٢س - ٢س^٢$				$=$

كثيرات الحدود كمعامل،
تقرأ العبارة (س + ٤)(س - ٢)
على الصورة س زائد ٤
مضروباً في س ناقص ٢

مثال ٢ طريقة التوزيع بالترتيب

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(أ) (٥ + ٣ص)(٧ - ٢ص)$$

$$\begin{aligned} (٥ + ٣ص)(٧ - ٢ص) &= (٥)(٧) + (٣ص)(٧) + (٥)(٢ص) + (٣ص)(٢ص) \\ &= ٣٥ + ٢١ص + ١٠ص + ٦ص^٢ \\ &= ٣٥ + ٣١ص + ٦ص^٢ \end{aligned}$$

طريقة التوزيع بالترتيب
اضرب
اجمع الحدود المتشابهة

$$(ب) (٩ - أ٢)(٥ - أ٤)$$

$$(٩ - أ٢)(٥ - أ٤)$$

$$\begin{aligned} (٩ - أ٢)(٥ - أ٤) &= (٩)(٥) + (أ٢)(٥) + (٩)(أ٤) + (أ٢)(أ٤) \\ &= ٤٥ + ٥أ٢ - ٣٦أ - ٨أ^٢ \\ &= ٤٥ + ٥أ٢ - ٣٦أ - ٨أ^٢ \end{aligned}$$

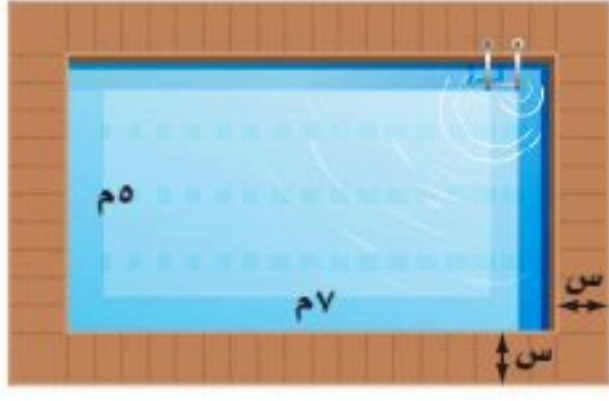
طريقة التوزيع بالترتيب
اضرب
اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

$$(أ) (١٢) (٥ - ب)(٢ + ب) \quad (ب) (٦ - ص)(٥ - ص)(٢ - ص)$$

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أعطي بعده على صورة ثنائي حد.

مثال ٣ من واقع الحياة التوزيع بالترتيب



بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو ٥ متر. فاكتب عبارة تمثل مساحة سطح البركة والممر معاً.

افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة سطح البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار ٢س، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـ $٧ + ٢س$ والعرض بـ $٥ + ٢س$

المساحة = الطول × العرض
 $(٧ + ٢س)(٥ + ٢س) =$
 $٢س(٧ + ٢س) + (٥)(٧) +$
 $٣٥ + ١٤س + ١٠س + ٤س^٢ =$
 $٣٥ + ٢٤س + ٤س^٢ =$

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معاً هي $٣٥ + ٢٤س + ٤س^٢$

تحقق: اختر قيمة لـ $س$ وعوّضها في العبارتين $(٧ + ٢س)(٥ + ٢س)$ ، $٣٥ + ٢٤س + ٤س^٢$ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكلا العبارتين.

تحقق من فهمك

(٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة سطح البركة والممر معاً.

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضاً لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

مثال ٤ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(أ) $(٥ + ٦س)(٥ - ٣س - ٢س^٢)$

$(٥ + ٦س)(٥ - ٣س - ٢س^٢) =$

$٦س(٥ - ٣س - ٢س^٢) + (٥)(٥ - ٣س - ٢س^٢) =$

$١٢س - ١٨س^٢ - ١٢س^٣ + ٢٥ - ١٥س - ١٠س^٢ - ٢٥س^٢ =$

$١٢س - ١٨س^٢ - ١٢س^٣ + ٢٥ - ٤٥س^٢ =$

(ب) $(٢ص٢ + ٣ص - ١)(١ - ٣ص + ٥ص^٢)$

$(٢ص٢ + ٣ص - ١)(١ - ٣ص + ٥ص^٢) =$

$٢ص^٢(١ - ٣ص + ٥ص^٢) + (٣ص - ١)(١ - ٣ص + ٥ص^٢) =$

$٢ص^٢ - ٦ص^٣ + ١٠ص^٤ + ٣ص - ٩ص^٢ + ٥ص^٣ - ١ + ٣ص - ٥ص^٢ + ٥ص^٣ - ١٥ص^٤ =$

$٢ص^٢ - ٦ص^٣ - ٤ص^٤ + ٦ص - ١٤ص^٢ + ١١ص^٣ - ١١ص^٤ =$

تحقق من فهمك

(أ٤) $(٥ - ٣س)(٥ + ٢س^٢ + ٧س - ٨)$ (ب٤) $(٣ - ٢م + ٢م^٢)(٥ + ٧م - ٤م^٢)$



الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

إرشادات للدراسة

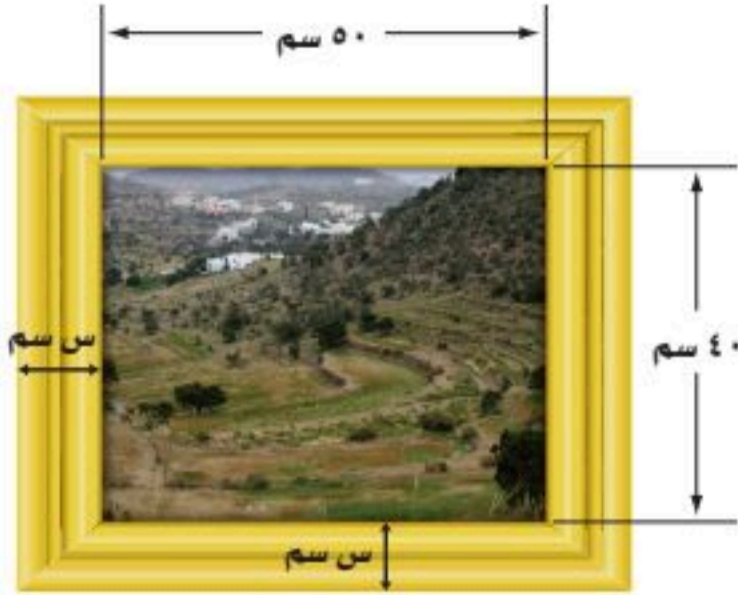
ضرب كثيرات الحدود

عند ضرب كثيرة حدود تحوي $م$ حداً في أخرى تحوي $ن$ حداً، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي $م \times ن$ حداً، وفي المثال (أ٤) ناتج الضرب يحوي $٦ = ٣ \times ٢$ حدود قبل التبسيط.

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج الضرب في كلِّ مما يأتي:

(١) $(٥ + س)(٢ + س)$ (٢) $(٢ - ص)(٤ + ص)$ (٣) $(٧ - ب)(٣ + ب)$

(٤) $(٣ + ن)(٩ + ن)$ (٥) $(١ - هـ٨)(٣ - هـ٢)$ (٦) $(٩ + أ٢)(٦ - أ٥)$



مثال ٣ (٧) **إطار صورة:** صمّم خالد إطارًا للصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.

مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(٨) $(٣ - ٢ص٤)(٢ + ٧ص٢)$

(٩) $(٥ + س٤ - ٢س٣)(٤ - س٣ + ٢س٥)$

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٠) $(٤ - ص٣)(١ - ص٥)$ (١١) $(٥ - د٦)(٧ - د٤)$ (١٢) $(٥ + م٣)(٣ + م٢)$

(١٣) $(٥ - ن١٢)(٥ + ن١٢)$ (١٤) $(٧ + ر٥)(٧ - ر٥)$ (١٥) $(٨ + ل٤)(٦ - ل٥)$

مثال ٣ (١٦) **حديقة:** يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

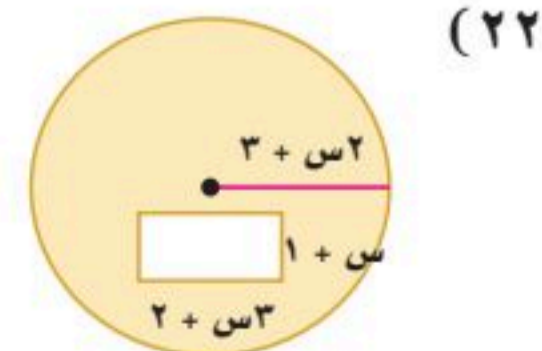
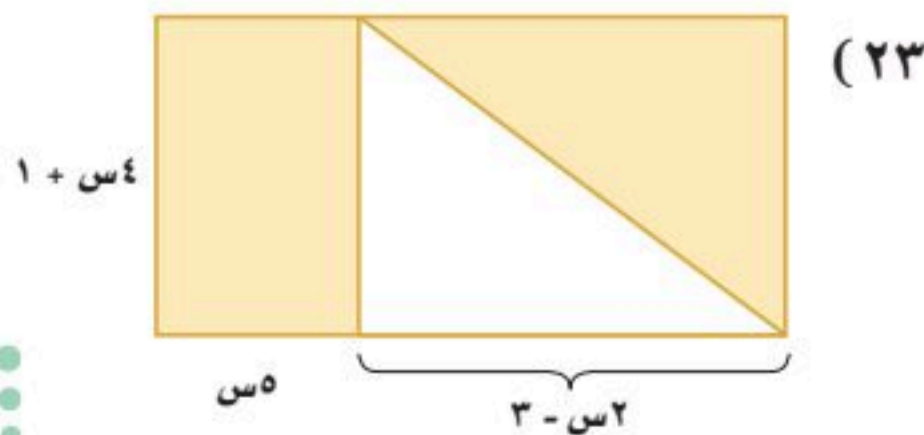
مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٧) $(١١ - ص٢)(٢ + ص٣ - ٢ص١١)$ (١٨) $(٧ + أ٤)(٧ - أ٢ + ٢أ٩)$

(١٩) $(١ - س٥ + ٢س١)(١ + س٦ - ٢س٥)$ (٢٠) $(٢ - ع٥ - ٢ع٦)(٤ - ع٢ - ٣ع٣)$

(٢١) بسّط العبارة: $(٢ + م)[(٦ - م٣ + ٢م) + (٤ + م٢ - ٢م)]$

هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



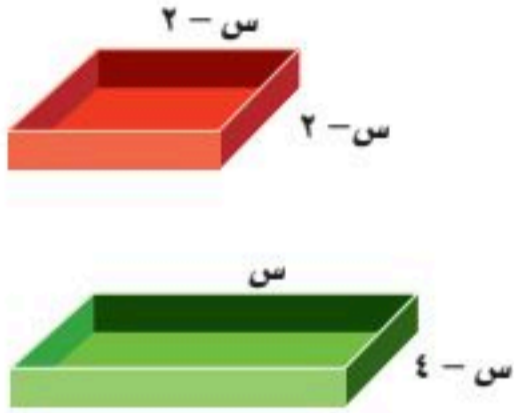
(٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص - ٥) متر، (٨ص + ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

(ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

(٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س + ٣، وارتفاعه ٣س - ١

(٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانباً.



(أ) ما قيم س الممكنة؟ فسّر إجابتك.

(ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟

(ج) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟

(٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

العبارة (٢)	العبارة
	س + ٥
	٣ص + ١
	ع + ك

(أ) جدوليّاً: انقل الجدول الآتي وأكمله.

(ب) لفظياً: اكتب جملة توضح كيفية الحصول على مربع مجموع حدين.

(ج) رمزيّاً: اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.



الربط مع الحياة

فاز المنتخب السعودي العسكري ببطولة العالم العسكرية في كرة الطائرة التي استضافتها ألمانيا في عام ٢٠٠٨ م.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٨) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة "يمكن استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود" صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً، وفسّر إجابتك.

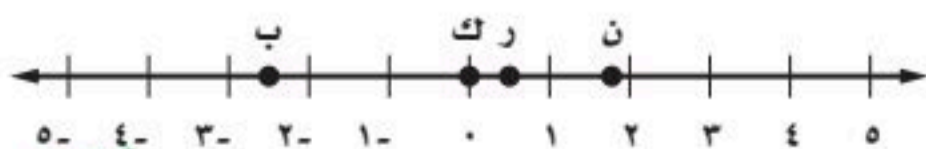
(٢٩) **تحذ:** أوجد ناتج: (س + ٢س)(س - ٢س - ١س + ٥س).

(٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيراً واحداً، ثم أوجد ناتج ضربيهما.

(٣١) **اكتب:** لخص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

(٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً مكعبه أكبر منه؟



(٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٥س - ٢س، ٣س + ٤؟

(أ) ٥س - ١

(ج) ٦س - ٢٠

(د) ٦س + ٧س - ٢٠

(ب) ٦س - ٧س - ٢٠

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلِّ مما يأتي: (الدرس ٦-٤)

$$(34) \quad (10 + 2a^3) + (5 - 2a^7) \quad (35) \quad (2n^2 - 8n) + (2n^6 - 4n) \quad (36) \quad (2b + 5a + 8a) - (3b + 4a + 3a)$$

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية: (الدرس ٦-١)

$$(37) \quad (2n^2 - 3)^3 - (2n^2 - 3)^4 \quad (38) \quad (2h^3 - 3)^2 - (2h^3 - 3)^2 \quad (39) \quad (3v^3 - 2)^2 + (3v^3 - 2)^3$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلًّا مما يأتي:

$$(40) \quad (2t^2 - 3)^3 - (2t^2 - 3)^4 \quad (41) \quad (2n^2 - 2)^2 + (2n^2 - 2)^3$$





حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟



يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهم إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهم هو $(نق + ١٢)$ ، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟
يعرف محمد أن قطر لوحة السهم هو $٢(نق + ١٢)$ ، فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي $٢(نق + ١٢)$ ، ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. $م = ٢(نق + ١٢)^٢$

فيما سبق

درست ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل $٢(نق + ١٢)$ لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع $(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب)$ هو أحد نواتج الضرب تلك.

$$\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{أ ب} \\ \text{أ ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{أ ب} \\ \text{أ ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{أ}^٢ \\ \text{أ}^٢ \end{array} = \begin{array}{c} \text{ب} + \text{أ} \\ \text{ب} + \text{أ} \end{array} \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \\ \text{ب}^٢ + \text{أ ب} + \text{أ ب} + \text{أ}^٢ = \text{أ}^٢(ب + \text{أ}) \end{array}$$

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

مربع مجموع حدين

التعبير اللفظي: مربع $(أ + ب)$ هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافاً إليه مربع ب.

$$\text{الرموز: } (أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = \text{أ}^٢ + ٢\text{أ ب} + \text{ب}^٢$$

$$\text{مثال: } (٤ + س)^٢ = (٤ + س)(٤ + س) = ١٦ + ٨س + س^٢$$

مثال ١ مربع مجموع حدين

أوجد ناتج: $٢(٥ + س٣)$.

مربع المجموع

$$(أ + ب)^٢ = \text{أ}^٢ + ٢\text{أ ب} + \text{ب}^٢$$

أ = ٣س، ب = ٥

$$٢(٥ + س٣) = ٢(٥ + س٣) = ٢(٥) + ٢(٣س) = ١٠ + ٦س$$

بسط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

$$٢٥ + ٣٠س + ٩س^٢ =$$

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$١) (٣س + ٤ص)^٢$$

$$١) (٨ج + ٣د)^٢$$



وزارة التعليم

ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب $-أ$ ب على صورة $أ + (-ب)$ ، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

$$\begin{aligned} \text{مربع مجموع حدين} \quad & (أ - ب)^2 = [أ + (-ب)]^2 = أ^2 + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^2 \\ & = أ^2 - ٢أب + ب^2 \end{aligned}$$

أضف إلى

مطوّبتك

مفهوم أساسي مربع الفرق بين حدين

التعبير اللفظي: مربع $(أ - ب)$ هو مربع ناقص مثلي حاصل ضرب $أ$ في $ب$ مضافاً إليه مربع $ب$.

$$\text{الرموز:} \quad (أ - ب)^2 = (أ - ب)(أ - ب) = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

$$\text{مثال:} \quad (٣ - س)^2 = (٣ - س)(٣ - س) = ٩ - ٦س + س^2$$

تنبيه !

مربع الفرق بين حدين
تذكر أن ناتج $(س - ٧)^2$
لا يساوي $س^2 - ٧^2$ أو
 $س^2 - ٤٩$ ، وأن
 $(س - ٧)^2 =$
 $(س - ٧)(س - ٧) =$
 $س^2 - ١٤س + ٤٩$

مثال ٢ مربع الفرق بين حدين

أوجد ناتج: $(٢س - ٥ص)^2$.

$$\begin{aligned} \text{مربع الفرق} \quad & (٢س - ٥ص)^2 = (٢س - ٥ص)(٢س - ٥ص) \\ & = (٢س)^2 - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^2 \\ & = ٤س^2 - ٢٠سص + ٢٥ص^2 \end{aligned}$$

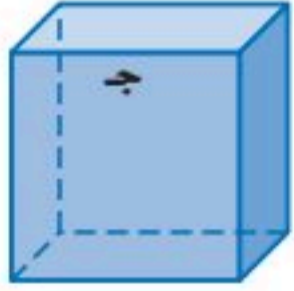
تحقق من فهمك

$$(١٢ - ٦ب - ١)^2 \quad (٢ب - ٢أ - ٢ب)^2$$

يُسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعاً كاملاً. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة مربع الفرق بين حدين

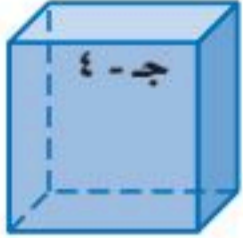
فيزياء: طول ضلع مكعب ألومنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـ ٤ سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألومنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.



ليكن $ج$ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألومنيوم $ج - ٤$

$$\text{مساحة سطح المكعب} \quad = ٦ل^2$$

$$\text{مساحة السطح} = ٦(ج - ٤)^2$$



$$\text{مساحة السطح} = ٦[ج^2 - ٢(٤)ج + (٤)^2] = ٦[ج^2 - ٨ج + ١٦]$$

$$\text{مساحة السطح} = ٦(ج^2 - ٨ج + ١٦)$$

تحقق من فهمك

(٣) حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

(أ) بين كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

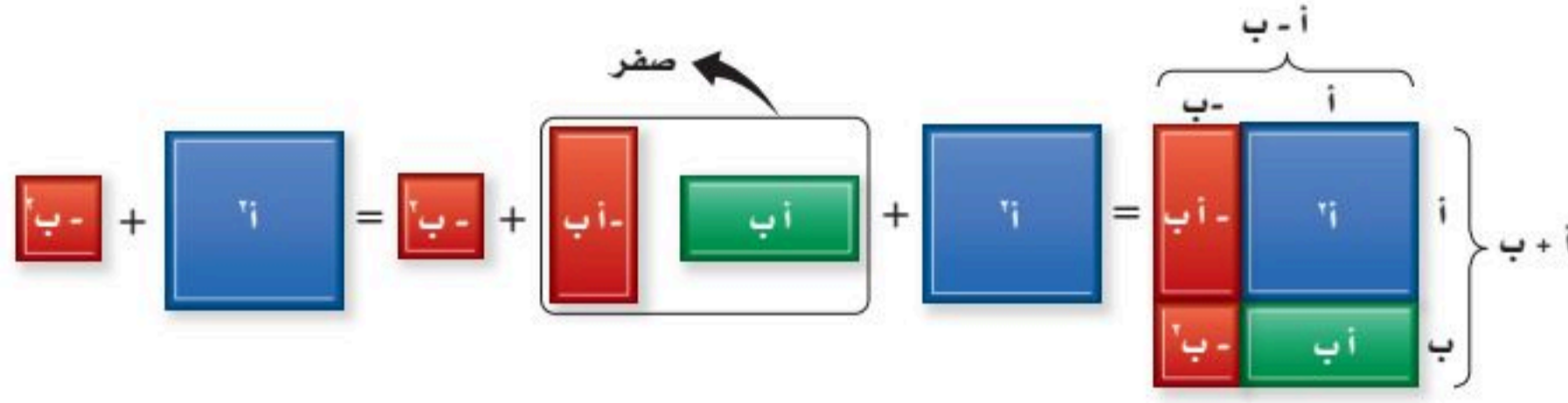
(ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، $(أ+ب)(أ-ب)$. تذكر أنه يمكن كتابة $أ-ب$ على الصورة $أ+(-ب)$.



لاحظ أن كلاً من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر. لذا فإن $(أ+ب)(أ-ب) = أ^2 - أب + أب - ب^2 = أ^2 - ب^2$.

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن $أ، ب$ قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما
التعبير اللفظي: ناتج ضرب $(أ+ب)$ ، $(أ-ب)$ هو مربع ناقص مربع $ب$.
الرموز: $(أ+ب)(أ-ب) = (أ-ب)(أ+ب) = أ^2 - ب^2$

مثال ٤

أوجد ناتج: $(٣+٢س)(٣-٢س)$.
حاصل ضرب المجموع في الفرق
 $٣=ب، ٢س=أ$
بسّط
 $٩-٤س٤ =$

تحقق من فهمك

$(١٤) (٢+٣)(٢-٣)$ $(٤ب) (٤ج-٤د)(٤ج+٤د)$

تأكد

المثالان ١، ٢

أوجد ناتج كل مما يأتي:

- (١) $(٥+س)$ (٢) $(١١-أ)$ (٣) $(٣+٢س)(٣-٢س)$
(٤) $(٤-م٣)(٤-م٣)$ (٥) $(ج-٤هـ)(ج-٤هـ)$ (٦) $(٣ج+٤د)$

مثال ٣

(٧) **ألعاب:** تحوي لعبة القرص الطائر قرصاً على شكل دائرة نصف قطرها $(س+٤)$ سم.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

(ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ٣.١٤).

مثال ٤

أوجد ناتج كل مما يأتي:

- (٨) $(٣-أ)(٣+أ)$ (٩) $(٥+س)(٥-س)$ (١٠) $(٧-ص٦)(٧+ص٦)$



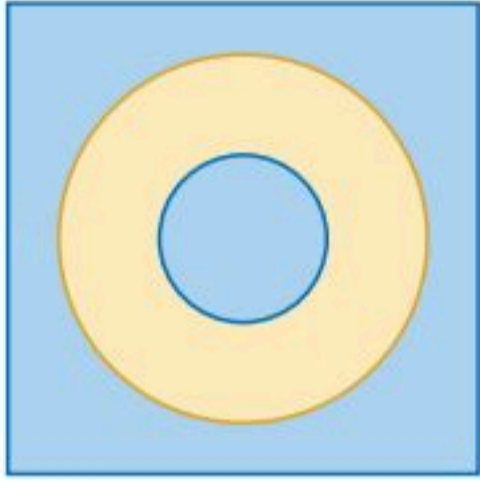
وزارة التعليم

الدرس ٦-٧: حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

2025 - 1447

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

- (١١) $(١٠ + أ)(١٠ + أ)$ (١٢) $(٦ - ب)(٦ - ب)$ (١٣) $(٧ + هـ)^٢$
 (١٤) $(٦ + س)^٢$ (١٥) $(٨ - م)^٢$ (١٦) $(٩ - ٢ص)^٢$
 (١٧) $(٣ + ب٢)^٢$ (١٨) $(٢ - ٥ن)^٢$ (١٩) $(٨هـ - ٤ن)^٢$



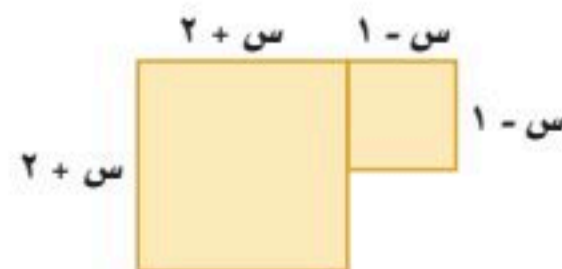
١٢ م

مثال ٣ (٢٠) مصارعة: تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بـ ٣ أمتار. (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الدائرة الكبرى. (ب) اكتب عبارة تمثل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

مثال ٤ أوجد ناتج كل مما يأتي:

- (٢١) $(٣ + ل)(٣ - ل)$ (٢٢) $(٤ - س)(٤ + س)$
 (٢٣) $(٥ + ك٢)(٥ - ك٢)$ (٢٤) $(٣ + ٢أ٣)(٣ - ٢أ٣)$
 أوجد ناتج كل مما يأتي:
 (٢٥) $(٧ + ص)^٢$ (٢٦) $(٨ - أ١٠)^٢$
 (٢٧) $(١٢ + ٣ن)(١٢ - ٣ن)$ (٢٨) $(٤ + ب)^٢$
 (٢٩) $(٥ - ك٣)^٢$ (٣٠) $(٢ج - ٩د)^٢$
 (٣١) $(٣ - ٤أ٣)(٣ + ٤أ٣)$ (٣٢) $(٥س - ٢ص)^٢$
 (٣٣) $(٣ب٩ - ٢أ٨)(٣ب٩ + ٢أ٨)$ (٣٤) $(٨ + ك\frac{٣}{٤})^٢$
 (٣٥) $(\frac{٢}{٥}ص - ٤)^٢$ (٣٦) $(٢ع٧ + ٥ص)^٢(٢ع٧ - ٥ص)^٢$
 (٣٧) $(٣ + م٢)(٣ - م٢)(٤ + م)$ (٣٨) $(٥ + ر)(٢ - ر)(٥ - ر)(٢ + ر)$

(٣٩) هندسة: اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة الشكل أدناه.

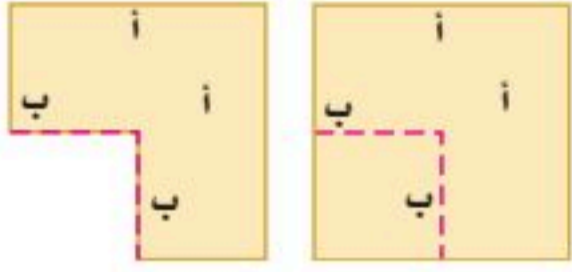


أوجد ناتج كل مما يأتي:

(٤٠) $(ج+د)(د+ج)(د+ج)$ (٤١) $(ب-أ)^3$ (٤٢) $(ج+ف)(ج-ف)(ج+ف)$

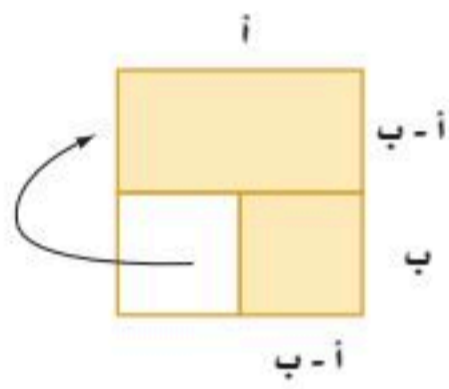
(٤٣) $(ك-م)(ك+م)(ك-م)$ (٤٤) $(ب-ن)^2(ب+ن)$ (٤٥) $(ك-ر)^2(ك+ر)$

(٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعاً صغيراً في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

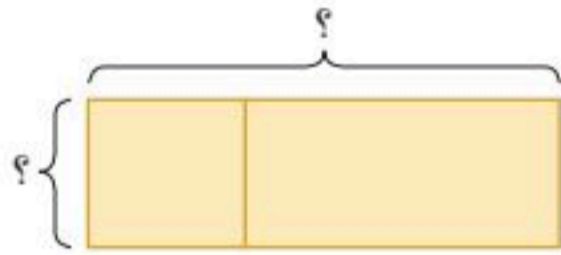


(أ) عددياً: أوجد مساحة كل مربع.

(ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟



(ج) تحليلياً: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟



(د) تحليلياً: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، ج؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

$(ج+د)(د+ج)$

$(د+ج+٢)(د+ج+٢)$

$(د+ج+٢)(د-ج-٢)$

$(د-ج-٢)(د-ج-٢)$

(٤٨) **تحّد:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع $(أ+ب)^3$ ؟

(أ) استقص إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: $(أ+ب)(أ+ب)(أ+ب)$.

(ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: $(س+٢)^3$.

(٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة ج التي تجعل من العبارة $٢٥س^٢ - ٩٠س + ج$ مربعاً كاملاً.

(٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما.



تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب $(3-2)$ $(3-2)$ ؟

أ) $9+112+2^4$ ج) $9-112-2^4$

ب) $9+2^4$ د) $9+112-2^4$

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦ كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟

أ) $\frac{3}{15}$ م ج) ٥ م

ب) ١٨٠ م د) $\frac{2}{5}$ م

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج $(4-3)(2-7)$: (الدرس ٦-٦)

٥٤) بسّط العبارة $3(6-ب) + 2(\frac{1}{4}ب - 3)$: (الدرس ٥-٦)

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(4, 7)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلاً من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

١٦٥ (٥٩)

٩٠٠ (٥٨)

١٢٠ (٥٧)

٤٠ (٥٦)

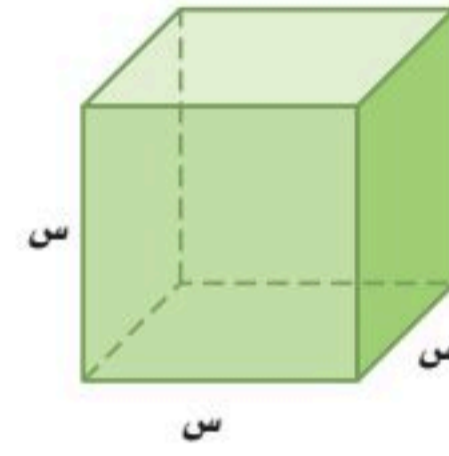


بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(١) $(٢س٧)(٨س٨)$

(٢) $(٥أ٧ب٢ج٢)(٢ب٢ج٢)$

(٣) اختيار من متعدد: عبّر عن حجم المجسم أدناه كوحيدة حد:



(ب) $٦س$

(أ) $٣س$

(د) $٦س٦$

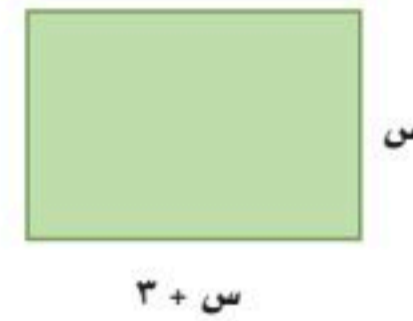
(ج) $٦س٣$

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

(٤) $(٧+س) + (٥+س) - (٢س٣-٣س+٧)$

(٥) $(٧م-٨ن٢+٣ن) - (٢ن٢+٤م-٣ن)$

(٦) اختيار من متعدد: ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبيّنة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟



(أ) $٣س٢+٣س$

(ب) $٣س٢+٣س-٥$

(ج) $٢س٢+٦س-١٠$

(د) $٨س+١٢$

بسّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضًا أن أي مقام لا يساوي صفرًا:

(٧) $\frac{٨س٦ص٨}{٢س}$

(٨) $\left(\frac{٢أ٢ب٣}{٦ج٦}\right)$

(٩) $\frac{٢س٢ص٧-}{٨س}$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٠) $(١٠-٢+٢أ)$

(١١) $(٥+٣)(٥-٢)$

(١٢) $(٣-س)(٥+٢س-٦)$

(١٣) $٢(٣+س)$

(١٤) $(٥+٢ب)(٥-٢ب)$

(١٥) هندسة: منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي:

س، س+٣، ٢س+٥

(أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س.

(ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟

حل كل معادلة فيما يأتي:

(١٦) $٥(٢ن-٣+٢ن) = ٥(٢ن-٣)$

(١٧) $٣س(٢+س) = ٣(س٢-٢)$

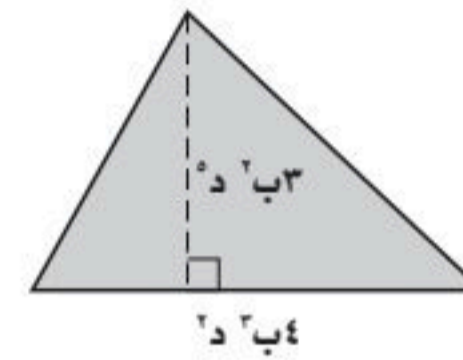
(١٨) هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) عبّر عن مساحة المثلث أدناه في صورة وحيدة حد؟

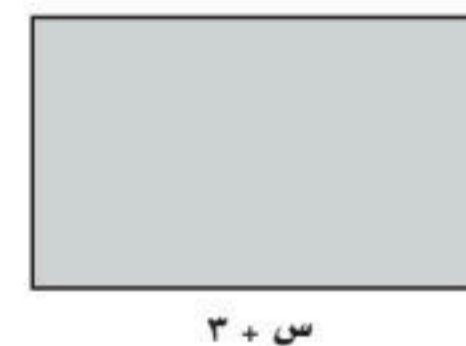


- (أ) $١٢ ب٥ د٧$ (ب) $١٢ ب٦ د١٠$
(ج) $٦ ب٦ د١٠$ (د) $٦ ب٥ د٧$

٢) بسّط العبارة $\left(\frac{٢٤ ل٥ د٣}{٤ س٣}\right)^٣$

- (أ) $\frac{٨ ل٥ ع٢}{٧ س٣}$ (ب) $\frac{١٥ ل٦ ع٨}{١٢ س٢٧}$
(ج) $\frac{٨ ل٥ ع٨}{٧ س٢٧}$ (د) $\frac{١٥ ل٦ ع٢}{١٢ س٣}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $س٢ - ٩$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

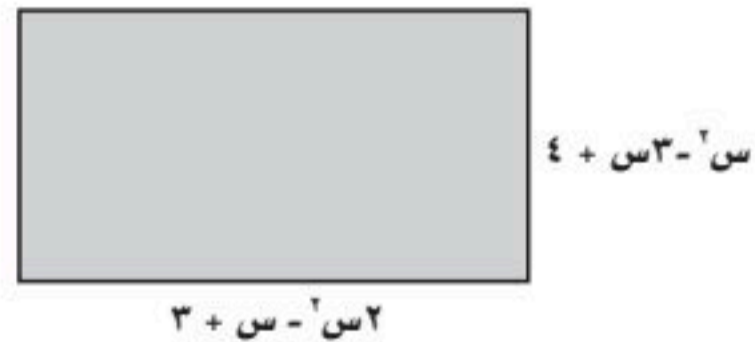


- (أ) $س + ٣$ (ب) $س + ٩$
(ج) $س - ٩$ (د) $س - ٣$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٢: استعمل قوانين الأسس لتبسيط العبارة، وتذكر أنه لإيجاد أس الأس، نضرب الأسس.

٤) عبّر عن محيط المستطيل أدناه بصورة كثيرة حدود.



- (أ) $٧ + س٣ - ٢ س٤$
(ب) $٧ + س٣ + ٢ س٤$
(ج) $١٤ + س٦ - ٢ س٨$
(د) $٧ + س٤ - ٢ س٦$

٥) أوجد ناتج طرح: $(٥ + ٢أ٣ + ٣أ٤ -) - (٢ - أ٦ + ٢أ٧)$

- (أ) $٧ - أ٦ + ٢أ٤ + ٣أ٤$
(ب) $٧ - أ٣ + ٢أ١١$
(ج) $٣ + أ٦ + ٢أ١٠ + ٣أ٤$
(د) $أ٣ - ٣أ٧ + ٣أ٤$

٦) بسّط العبارة: $\frac{٢ ل٣ هـ}{٤ - ل٣ هـ}$

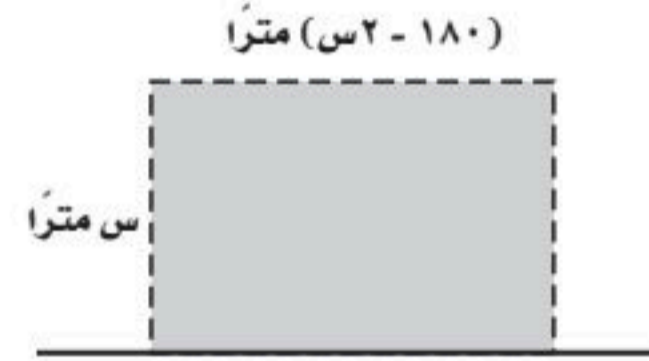
- (أ) $\frac{٦ ل٣ هـ}{٦ ل٣ هـ}$ (ب) $\frac{٦ ل٣ هـ}{٦ ل٣ هـ}$
(ج) $٦ ل٣ هـ$ (د) $٦ ل٣ هـ$



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) يريد مزارعٌ زراعة قطعة الأرض المستطيلة المبينة في الشكل:



(أ) اكتب كثيرة حدود تعبر عن مساحة الأرض.

(ب) أوجد مساحة قطعة الأرض، إذا كان عرضها ٤٠ متراً.

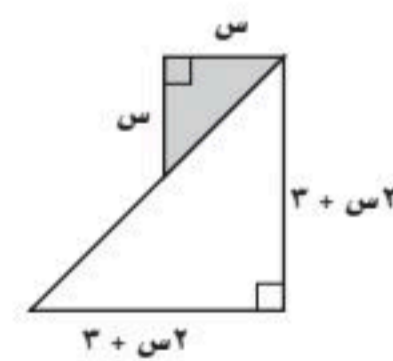
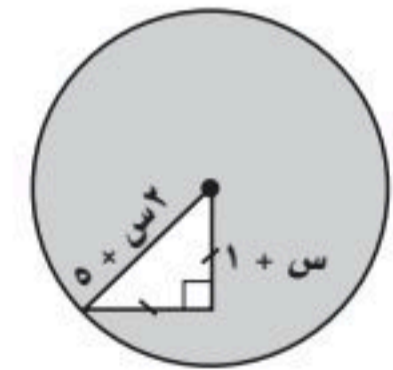
(٨) اكتشف المختلف: أي العبارات التالية مختلفة؟ فسّر إجابتك.

$$(٣ - م٢) (٢ + ن٣)$$

$$(٣ + م٢) (٢ + ن٣)$$

$$(٣ + م٢) (٢ - ن٣)$$

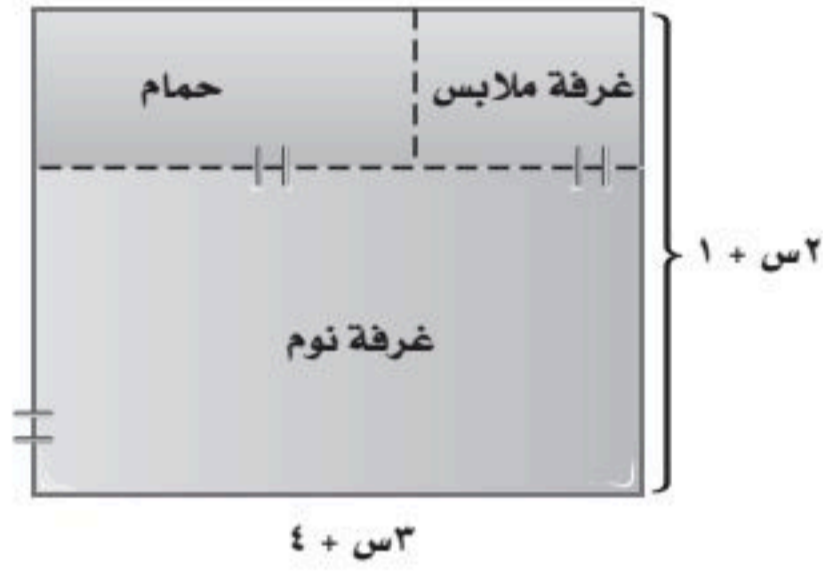
اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(١١) المخطط التالي يبيّن تفاصيل جناح نوم:



(أ) أوجد مساحة الجناح كاملاً.

(ب) إذا كان عرض غرفة الملابس س، وطولها س + ١، فأوجد مساحة غرفة الملابس.

(ج) أوجد مساحة الحمام.

(د) أوجد مساحة غرفة النوم.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..



فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّ وحيدات الحد.
- أحلّ ثلاثيات الحدود.
- أحلّ الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

لماذا؟

هندسة عمارة: يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

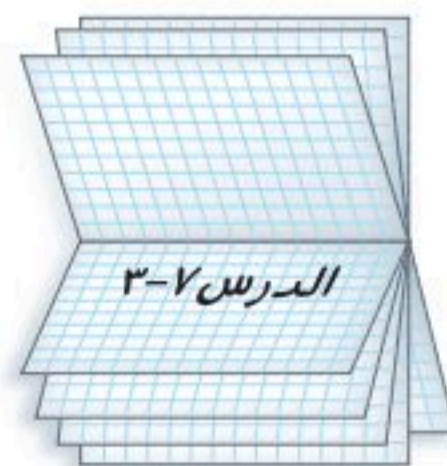
المفردات:

- الصيغة التحليلية ص (٦٢)
- تحليل كثيرة الحدود ص (٦٦)
- المعادلة التربيعية ص (٧٧)
- كثيرة الحدود الأولية ص (٨٥)

المطويات منظم أفكار

التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئاً بأربع أوراق مربعات.

٢ **أدخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمّ الورقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

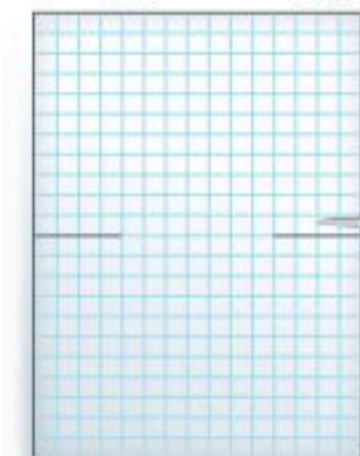


١ **اطو** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضياً، وقصّ ٥ سم بدءاً من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقف على بعد ٥ سم من طرفيها.

الورقتان الأخريتان



الورقتان الأوليتان





التهيئة للفصل ٧

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:

٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س)، ثم بسّطها.

٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س)

$6s(-3s - 5s - 5s + 2s + 3s) = 6s(-3s - 5s - 5s + 2s + 3s)$

$= -18s^2 - 30s^2 - 30s^2 + 12s^2 + 18s^2 = -48s^2$

$= -48s^2$

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-٥)

(١) أ(٥ + أ) (٢) ٢(٣ + س)

(٣) ن(٣ - ن + ٢) (٤) ٦(٥ - س + ٦)

(٥) مال: ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي،

فاشترى كل منهم بطاقة دخول بـ ٩ ريال، وعلبة

عصير بـ ٣ ريال، وشطيرة بـ ٦ ريال. فاكتب عبارة

تمثل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعًا.

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: (٣ + س)(٢ - س).

العبارة الأصلية (٣ + س)(٢ - س)

طريقة التوزيع بالترتيب $= 3(2-s) + 2(2-s)$

$3(2-s) + 2(2-s)$

اضرب $= 6 - 3s + 4 - 2s = 10 - 5s$

اجمع الحدود المتشابهة $= 10 - 5s$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٦)

(٦) (٢ + س)(٥ - س)

(٧) (٤ + س)(١ - س)

(٨) (٣ - أ)(٤ + أ)

(٩) (٤ - س)(٥ + س)

(١٠) (٤ + س)(٧ + س)

(١١) (٢ - أ)(٩ + أ)

(١٢) مفرش مائدة: مفرش مائدة مستطيل الشكل إذا

كان طوله (٢ + س)، وعرضه (١ + س)، فاكتب

عبارة تمثل مساحته.

مثال ٣

أوجد ناتج: (٨ + ص)².

مربع مجموع حدين $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(8+v)^2 = 8^2 + 2(8)(v) + v^2 = 64 + 16v + v^2$

بسّط $= 64 + 16v + v^2$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

(١٣) (٣ - أ)²

(١٤) (٥ + س)²

(١٥) (٣ - س)²

(١٦) (٥ + س)(٥ - س)

(١٧) تصوير: صورة بعدها: (٦ + س) سم،

(٦ - س) سم. فما مساحتها؟



تحليل وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

تعمل هند قلائد خرز، فإذا كان لديها ٦٠ خرزة فضية اللون، و ١٥ خرزة ذهبية اللون، وترغب في أن تحتوي القلادة الواحدة على نوع واحد من الخرزة، وفي كل منها العدد نفسه، وتحوي كل منها أكبر عدد من الخرزة، فستحتاج هند إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٦٠ و ١٥

تحليل وحيدات الحد: تحليل وحيدات الحد يشبه تحليل الأعداد الكلية. وتكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عُبر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس ١

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول: إننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تاماً.

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد.

والآن

- أحلل وحيدة الحد إلى عواملها.
- أجد القاسم المشترك الأكبر لوحدات الحد.

المفردات

الصيغة التحليلية

القاسم المشترك الأكبر

(ق.م.أ)

مثال ١ تحليل وحيدة الحد

حلل: $20 - 3ص^2$ تحليلاً تاماً.

$$20 - 3ص^2 = 1 \times 2 \times 2 \times 5 - 3 \times ص \times ص$$

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 5 - 3 \times ص \times ص$$

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 5 - 3 \times ص \times ص$$

$$20 - 3ص^2 = 1 \times 2 \times 2 \times 5 - 3 \times ص \times ص$$

$$20 = 1 \times 2 \times 2 \times 5, 3 = 3 \times ص \times ص$$

$$ص^2 = 2 \times ص \times ص$$

$$10 = 2 \times 5$$

لذا، فإن التحليل للعوامل لوحدية الحد $20 - 3ص^2$ هو: $1 \times 2 \times 2 \times 5 - 3 \times ص \times ص$.

تحقق من فهمك

حلل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تاماً:

$$(أ) 52 - 2ب^2$$

$$(أ) 34 - 4ص^3$$

القاسم المشترك الأكبر: قد يكون لعددين كليين أو أكثر بعض العوامل الأولية المشتركة. ويُسمى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة القاسم (العامل) المشترك الأكبر لها.

القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملاً لكل من هذه الأعداد، ويمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحدتي حد أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال ٢ القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحيدات الحد

أوجد (ق.م.أ) لوحدتي الحد $12ب^2$ ج، $18ب^3$.

حلل كل وحيدة حد تحليلاً تاماً

$$12ب^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times ب \times ب$$

ضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

$$18ب^3 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times ب \times ب \times ب$$

إذن، (ق.م.أ) لوحدتي الحد $12ب^2$ ج، $18ب^3$ هو $2 \times 3 \times ب = 6ب$.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحد الآتية:
(١٢) ٦س ص^٣، ١٨ص ع (٢) ١١أ^٢ب، ٢١أ^٢ب (٢) ٣٠ك^٣ر^٢ن، ٥٠ك^٢ر^٢ن

مثال ٣ من واقع الحياة إيجاد (ق.م.أ)

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و ٣٠ زنبقة لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠

$$٥ \times ٢ = ١٠$$

اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

$$٥ \times ٣ \times ٢ = ٣٠$$

العاملان الأوليان المشتركان هما: ٥، ٢

(ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠ هو $١٠ = ٥ \times ٢$ ؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن $٢٠ = ١٠ \times ٢$ ، $٣٠ = ١٠ \times ٣$ ؛ لذا فستحتوي كل باقة على ٣ زنابق.

تحقق من فهمك

(٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ٨٤سم^٢، ٧٠سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان؟

تأكد

مثال ١

حلل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

$$(١) ١٢ج٢ه٤$$

$$(٢) ٣٨ر٢ب٢ن$$

$$(٣) ١٧س٣ص٢ع$$

$$(٤) ٢٣أ٢ب٣$$

المثالان ٢، ٣

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحد الآتية:

$$(٥) ٢٤ج٣د٣، ٤٨ج٢د$$

$$(٦) ٧ج٣ه٤، ١١م٢ب$$

$$(٧) ٨س٢ص٣، ٣١س٣ص٣$$

$$(٨) ١٠أ٢ب، ٢٥أ٢$$

(٩) **هندسة:** ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ١٥سم^٢، ١٦سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حلل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

$$(١٠) ٩٥س ص٢$$

$$(١١) ٣٥أ٣ج٢$$

$$(١٢) ٤٢ج٣ه٣$$

$$(١٣) ٨١ن٥ب$$

$$(١٤) ١٠٠ك٤ر$$

$$(١٥) ١٢١أ٢ب٣ج$$

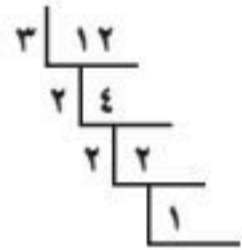


أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

(١٦) ٢٥س٣، ٤٥س٤، ٦٥س٢ (١٧) ٢٦ع٢، ٣٢ع٤، ٤٤ع٤

(١٨) ٣٠ج٥ه٢، ٤٢ج٥ه٢، ٦٦ج٥ه٢

(١٩) ١٢ك٨ر٢، ١٦ارن (٢٠) ٤٢أ٢ب، ٢٦أ٢ب، ١٨أ٢ب (٢١) ١٥ارن، ٣٥ن٢، ٧٠رن

(٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كل كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟(٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨ سم^٢، كم يمكن أن يكون طول كل من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟(٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتابًا على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كل رف العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟(٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساويًا على كل رف ولا يقل عن ٥؟(٢٦) **تبرع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكثر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكون في كل حزمة؟(٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمين هما عددان أوليان فرديان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ و ٥، ٥ و ٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.(٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.العدد ١٢ يكتب على الشكل 3×2 عند تحليله لعوامله الأولية(أ) **تحليليًا:** انسخ مخطط السلم المبيّن جانبًا ٦ مرات، وسجّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عددًا كليًا، بحيث يكون اثنان منها أوليين.(ب) **تحليليًا:** اختر عاملاً أوليًا لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١. وأضف أو احذف أجزاء من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرر هذه العملية مع جميع الأعداد.(ج) **لفظيًا:** ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٩) **تحّد:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقق الشروط الآتية: (ق. م. أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر.(٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفًا لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين (ق. م. أ) و (م. م. أ) لعددين أو أكثر.

(٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحدتي حد لا يساوي ١ أبدًا" صحيحة أم خاطئة؟ ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١٥ ^٢ ب ج ^٣	
٦ ^٢ ج د ^٣	
١٢ ج د ^٢ ف	
٢٢ د ^٢ ف ل ^٢	
٣٠ ف ل ^٢ ه ^٢	

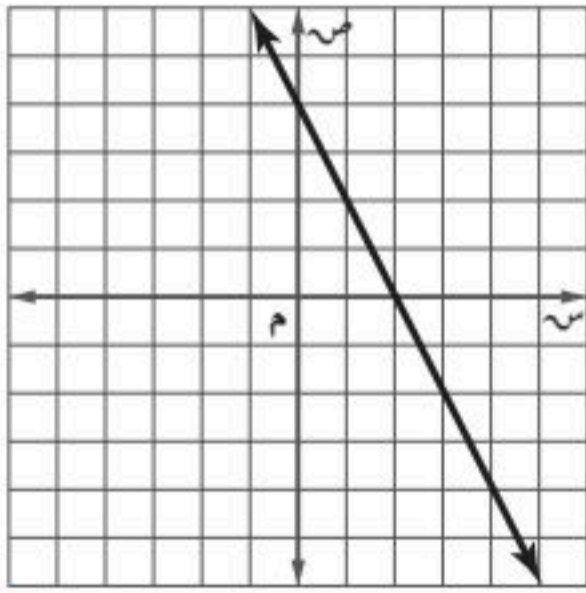
(٣٢) **تحذ:** يُسمّى العددان الصحيحان أو وحدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م. أ.) لهما هو العدد ١. انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحديد أزواج وحديات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها.

(٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحديات حد على أن يكون (ق. م. أ.) لها ٦ ص^٣. فسر إجابتك.

(٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأولية، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م. أ.) لوحيدتي حدّ أو أكثر.

تدريب على اختبار

(٣٧) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم المُبيّن في الشكل؟



- (أ) ص = ٢س + ٤
 (ب) ص = ٢س - ٥
 (ج) ص = $\frac{1}{2}$ س - ٦
 (د) ص = $\frac{1}{2}$ س + ٣

(٣٥) ما قيمة ه في المعادلة $٢٧ - ه = ٢ + ١٩$ ؟

- (أ) -٤
 (ب) ٤
 (ج) ٢٣
 (د) ٤٦

(٣٦) إجابة قصيرة: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٥) و (٢، -١).

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

(٤٠) $(٥ - ع)^٢$

(٣٩) $(٦ + ج)^٢$

(٣٨) $(٤ - أ)^٢$

(٤٣) $(٧ + د)(٧ - د)$

(٤٢) $(٢ + ص)^٢$

(٤١) $(٣ - ن)(٣ + ن)$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٦)

(٤٦) $(٩ + ن)(٢ + ن)$

(٤٥) $(٥ - ه٣)(٢ - ه)$

(٤٤) $(٤ + م)(٣ - م)$

(٤٩) $(١ + ن)(٢ + ن)(٤ - ن)$

(٤٨) $(٣ + ف)(٣ + ك)$

(٤٧) $(٦ - ر)(١ - ر)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة ممّا يأتي:

(٥٢) $٥٢ - (٦ - ه١)$

(٥١) $\frac{1}{٢} د (٦ + د)$

(٥٠) $٢ (٤ - س - ٧)$

(٥٥) $٦ - ع٣$ س

(٥٤) $١٠ - ص٥$

(٥٣) $٩ - م٩$ ب



وزارة التعليم

الدرس ٧-١: تحليل وحديات الحد

٢٥
2025 - 1447



استعمال خاصية التوزيع

لماذا؟



تُحدّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة $م = ٦ + ١$ ض $٦ + ٢$ ض، حيث تمثل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل: استعملت خاصية

التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

$$٥ع (٧ + ٤ع) = ٥ع (٧) + ٥ع (٤ع) = ٣٥ع + ٢٠ع٢ =$$

ويمكنك الاستفادة من ذلك في العمل عكسياً للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

$$٦, ١ ض + ٢ ض = ٦, ١ ض (ض) + ٢ (ض) = (ض + ١, ٢) ض$$

كذلك $٥ع (٧ + ٤ع)$ يمثل تحليل ثنائية الحدّ $٢٠ع٢ + ٣٥ع$. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأولية.

٧-٢

فيما سبق

درست إيجاد (ق.م.أ) لمجموعة من وحدات الحدّ.

والآن

- استعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعية على الصورة: $أس + ب س + =$

المفردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

مثال ١ استعمال خاصية التوزيع في التحليل

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(أ) $٢٧ص + ١٨ص$

أوجد (ق.م.أ) لجميع الحدود.

حلّل كل حدّ.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٢٧ص = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$$

$$١٨ص = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣$$

(ق.م.أ) $٩ص = ٣ \times ٣$

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق.م.أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصية التوزيع لإخراج (ق.م.أ).

أعد كتابة كل حدّ باستعمال (ق.م.أ).

خاصية التوزيع.

$$٢٧ص + ١٨ص = ٩ص (٣ + ٢)$$

$$= ٩ص (٣ + ٢)$$

(ب) $٤أ - ٨أ + ٢أ$

حلّل كل حدّ.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٤أ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

$$٨أ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

$$٢أ = ٢ \times ١$$

(ق.م.أ) $٢أ = ٢ \times ١$

$$٤أ - ٨أ + ٢أ = ٢أ (٢ - ٤ + ١) = ٢أ (-١) = -٢أ$$

$$= -٢أ (١ + ٤ - ١) =$$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

خاصية التوزيع

تحقق من فهمك ✓

$$(أ) ١٥ - ٣ ف \quad (ب) ٧ ل ٢ ن ٢ + ٢١ ل ن ٢ - ل ن$$

تُسمى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

التحليل بتجميع الحدود

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معاً عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعي للآخر.

$$\text{الرموز:} \quad \text{أس} + \text{ب س} + \text{أص} + \text{ب ص} = (\text{أس} + \text{ب س}) + (\text{أص} + \text{ب ص})$$

$$= \text{س}(\text{أ} + \text{ب}) + \text{ص}(\text{أ} + \text{ب})$$

$$= (\text{س} + \text{ص})(\text{أ} + \text{ب})$$

مثال ٢ التحليل بتجميع الحدود

$$\text{حلّ: } ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦$$

$$٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦$$

العبارة الأصلية

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.)

خاصية التوزيع

$$= (٤ ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)$$

$$= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)$$

$$= (٤ ر + ٣)(ك + ٢)$$

لاحظ أنّ (ك + ٢) عامل مشترك لـ ٤ ر(ك + ٢) و ٣(ك + ٢).

تحقق من فهمك ✓

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

$$(أ) ١٢ ر ن + ٥ ن - ر - ٥ \quad (ب) ٣ ن ك + ١٥ ك - ٤ ن - ٢٠$$

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيراً جمعياً للأخرى. فمثلاً $١ - ٦ = ١ - (٦ - ٦)$

مثال ٣ التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

$$\text{حلّ: } ٢ م ك - ١٢ م + ٧ - ٤٢ ك$$

$$٢ م ك - ١٢ م + ٧ - ٤٢ ك$$

العبارة الأصلية

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة.

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.).

$$٦ - ك = ١ - (ك - ٦)$$

خاصية التجميع

خاصية التوزيع

$$= (٢ م ك - ١٢ م) + (٧ - ٤٢ ك)$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(١ - (ك - ٦))$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(١ - ك + ٦)$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(٧ - ك)$$

$$= (٢ م + ٧)(ك - ٦)$$

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.



وزارة التعليم

الدرس ٧-٢: استعمال خاصية التوزيع

2025 - 1447

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

$$(أ) \quad ٤ - ٢ج + ٨د - ٤ \quad (ب) \quad ٢٧ + ١٨ف - ٢ف٢ - ٣ف٣$$

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: $٠ = (٠)٣$ $٠ = (٢ - ٢)٠$ $٠ = (٠)٣١٢ -$ $٠ = (٠, ٢٥)٠$

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كل حالة يساوي صفراً. وتبيّن هذه الأمثلة خاصية الضرب الصفري.

مطويتك

مفهوم أساسي

خاصية الضرب الصفري

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفراً، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفراً.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان $أب = ٠$ ، فإن $أ = ٠$ ، أو $ب = ٠$ ، أو أن كليهما يساوي صفراً.

اضف إلى

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أي قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

مثال ٤ حل المعادلات

حلّ كلاً من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

$$(أ) \quad ٠ = (١٥ - ٣د)(٦ + ٢ج)$$

$$٠ = (١٥ - ٣د)(٦ + ٢ج)$$

المعادلة الأصلية

خاصية الضرب الصفري

حلّ كل معادلة

اقسم

$$٠ = ١٥ - ٣د \quad \text{أو} \quad ٠ = ٦ + ٢ج$$

$$١٥ = ٣د \quad ٦ - = ٢ج$$

$$٥ = د \quad ٣ - = د$$

الجذران هما ٣-، ٥

تحقق: عوض عن د بكلّ من ٣-، ٥ في المعادلة الأصلية.

$$٠ = (١٥ - ٣د)(٦ + ٢ج)$$

$$٠ = (١٥ - ٣د)(٦ + ٢ج)$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} [١٥ - (٥)٣][٦ + (٥)٢]$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} [١٥ - (٣-)٣][٦ + (٣-)٢]$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} (١٥ - ١٥)(٦ + ١٠)$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} (١٥ - ٩-)(٦ + ٦-)$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} (٠)١٦$$

$$٠ \stackrel{؟}{=} (٢٤-)(٠)$$

$$٠ = ٠$$

$$٠ = ٠$$

$$(ب) \quad ٢ج = ٣ج$$

$$٢ج = ٣ج$$

المعادلة الأصلية

اطرح ٣ج من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.

حلّ باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة $أب = ٠$

خاصية الضرب الصفري

حلّ كل معادلة

تحقق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من ج

$$٠ = ٢ج - ٣ج$$

$$٠ = (٢ج - ٣ج)$$

$$٠ = ٢ج - ٣ج \quad \text{أو} \quad ٠ = ٣ج - ٢ج$$

$$٣ = ٢ج$$

الجذران هما ٣، ٠

تنبيه !

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كل طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرفة.



تحقق من فهمك ✓

$$(أ) ٤٣(ن + ٢) = ٠ \quad (ب) ٨٠ - ٢ = ٤٠ = ٠ \quad (ج) ١٠ - ٢ = ١٠ = ٠$$

مثال ٥ من واقع الحياة استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة $٥ - ٢ن + ٢٠ = ٠$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهم، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض $٠ = ٤$

المعادلة الأصلية

$$٥ - ٢ن + ٢٠ = ٠$$

عوض عن ع بـ ٤

$$٥ - ٢(٤) + ٢٠ = ٠$$

حلل بإخراج (ق.م.أ)

$$٥ - ٨ + ٢٠ = ٠$$

خاصية الضرب الصفري

$$٥ = ٨ - ٢٠ \quad \text{أو} \quad ٥ = ٨ - ٢٠$$

حل كل معادلة

$$٥ = ٨ - ٢٠ \quad \text{أو} \quad ٥ = ٨ - ٢٠$$

اقسم كل حد على ١-

$$٥ = ٨ - ٢٠$$

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بـ ٤ ثوانٍ.

تحقق من فهمك ✓

٥) قفز الأرنب: يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة $٥ - ٢ن + ٢٠ = ٠$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتراً، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما $٠ = ٤$ صفرًا.



الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تأكد ✓

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

$$(١) ١١٥ - ٢١ \quad (٢) ١٤ - ٢ + ٢ \quad (٣) ١٢ك + ٦ل + ٢ك + ٢ك$$

حلل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

$$(٤) ١٦ + م + ٨ + ٢ + م \quad (٥) ٤٩ - ص + ٧ + ص - ٧ + ١٠ - ٢ + ١٥ - ج$$

حل كل كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٦) ٤٩ - ص + ٧ + ص - ٧ + ١٠ - ٢ + ١٥ - ج \quad (٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠ \quad (٨) ٠ = (٩ - م٣)(٢ + م٤) \quad (٩) ١٤ = ٢ر$$

١٠) صواريخ: أطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ثانية. وتمثل المعادلة $٤٢ - ٥ن + ٢ = ٠$ ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

(أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

$$(ب) حل المعادلة $٤٢ - ٥ن + ٢ = ٠$$$

(ج) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟



وزارة التعليم

الدرس ٧-٢: استعمال خاصية التوزيع

2025 - 1447

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(١١) $١٦ن - ٤٠ص$ (١٢) $٣٠ف + ٥٠س$

(١٣) $٢ك + ٤$ (١٤) $١٠ع + ٢ع$

(١٥) $٢أ٤ + ٢أ٢ب - ١٠أب$ (١٦) $٥ج٢ف - ١٥ج٢ف + ٥ج٢ف$

المثالان ٢، ٣

حلل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

(١٧) $١٦ + ٢٤ - ٤$ (١٨) $١٠ - ٥ + ٢هـ$

(١٩) $٣ص - ٢س - ٢ + ص$ (٢٠) $٣ - ٢٤نص - ١٨ن + ٤ص$

(٢١) $٣دن - ٣٥ + ٢١د$ (٢٢) $١٢ر + ٢ر$

(٢٣) $٥ + ٣٥ن - ٣هـ$ (٢٤) $٩٦ + ٨ف + ١٢ل$

(٢٥) $١٠ - ٢ر + ٢٥ب$ (٢٦) $١٢ - ٣ن + ٨و - ٢ن$

(٢٧) $٥جف٢ + ج٢ف + ١٥جف$ (٢٨) $٨١ - ٩ف + ٩ر$

(٢٩) $٢ر١٨ + ٢ر١٢ن - ٢ر٦$ (٣٠) $٣ - ٢هـ - ٢ج - ٢هـ$

مثال ٤

حل كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٣١) $٣ب(٩ب - ٢٧) = ٠$ (٣٢) $٢ن(٣ + ٣٣) = ٠$ (٣٣) $(٤ + ٤٨)(٤ + ٤٨) = ٠$

(٣٤) $(٣ + ٧س)(٣ - ٢س) = ٠$ (٣٥) $٣ب - ٢ب = ٠$ (٣٦) $٢أ = ٤أ$

مثال ٥

(٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة $٥ن - ٢ + ٥ن$ ؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

(أ) اكتب عبارة تمثل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.

(ب) أوجد قيم ن عندما $٥ = ٠$ ؟

(ج) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسّر إجابتك.

(٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة $١ - ١٠س + ١٢س$ ؛ حيث س، ص بالسنتيمتر. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

(أ) كوّن جدولاً لارتفاع القوس إذا كان س = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠ سم.

(ب) مثل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصل بين النقاط لتكوّن منحني يمثل القوس.

(ج) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟



الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردى قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.



؟	؟
؟	س'
؟	؟

(٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل $s^2 + s - 6$ ، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

(أ) تحليلياً: حدّد عددين ناتج ضربهما -6 ، وناتج جمعهما 1 .

(ب) رمزياً: اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمناً المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.

(ج) تحليلياً: أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل $s^2 + s - 6$.

(د) لفظياً: صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل $s^2 - 3s - 40$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة $2m^2 = 4m$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

حمد	راشد
$2m^2 = 4m$	$2m^2 = 4m$
$\frac{2m^2}{m^2} = \frac{4m}{m^2}$	$0 = 4m - 2m^2$
$2 = m$	$0 = (4 - 2m)m$
	$0 = 4 - 2m$ أو $0 = 2m$
	$2 = m$ أو $0 = m$

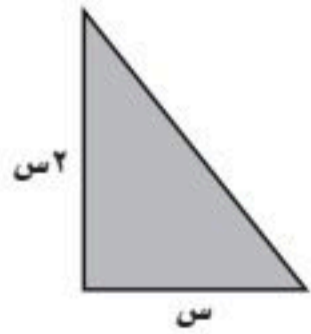
(٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّها.

(٤٢) **تبرير:** في المعادلة $ج = أ - ب$ ، ما قيم $أ$ ، $ب$ التي تجعل $ج = 0$ ؟

(٤٣) **اكتب:** وضح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصية الضرب الصفري.

تدريب على اختبار

(٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أدناه 5 سم²، فما ارتفاعه؟



- (أ) ٢ سم
(ب) ٥ سم
(ج) ٨ سم
(د) ١٠ سم

(٤٤) أي مما يأتي يمثل عاملاً لكثيرة الحدود:
 $٦ع^٢ - ٣ع - ٢ + ٤ع$ ؟

- (أ) $١ + ٢ع$
(ب) $٢ - ٣ع$
(ج) $٢ + ٤ع$
(د) $١ - ٢ع$



مراجعة تراكمية

أوجد (ق.م.أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧-١)

$$(٤٨) \text{ ص } ٤, \text{ ص } ١٨, \text{ ص } ٦$$

$$(٤٧) \text{ ج } ٨, \text{ ج } ١٦, \text{ ج } ٣$$

$$(٤٦) \text{ أ } ٣٠, \text{ أ } ٥٠$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

$$(٥٢) [٣(٢٤)]$$

$$(٥٠) (-٧-٣) (٤-٣) (٥١) (٩-٧)$$

$$(٤٩) (أ٤)(أ٢)$$

(٥٣) حلّ المتباينة $٣ < ٤ - ٣٧$ ، وتحقق من صحة الحل. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(٥٦) (١-ع)(٨-ع)$$

$$(٥٥) (١٠+د)(٤+د)$$

$$(٥٤) (٢+ب)(٥+ب)$$

$$(٥٩) (٢-هـ)(١١+هـ)$$

$$(٥٨) (٦-س)(٧-س)$$

$$(٥٧) (٣-ج)(٩+ج)$$





تحليل ثلاثية الحدود

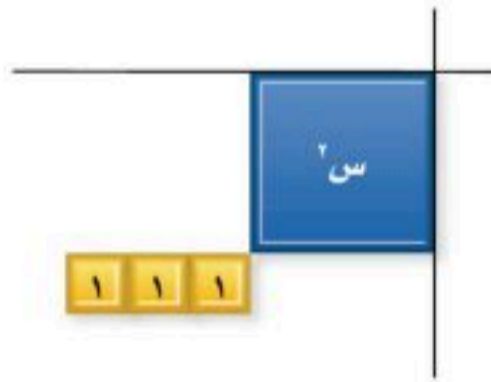
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

نشاط ١

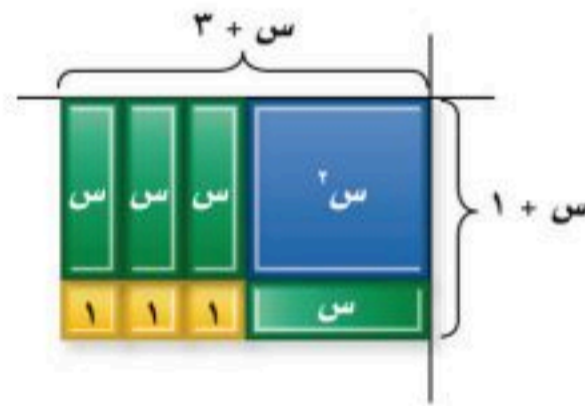
تحليل العبارة: $s^2 + 4s + 3$ ج

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $s^2 + 4s + 3$

الخطوة ١: مثل $s^2 + 4s + 3$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع البطاقة s^2 في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلاً. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات s ، فيكون بذلك

عرض المستطيل $s+1$ ، وطوله $s+3$

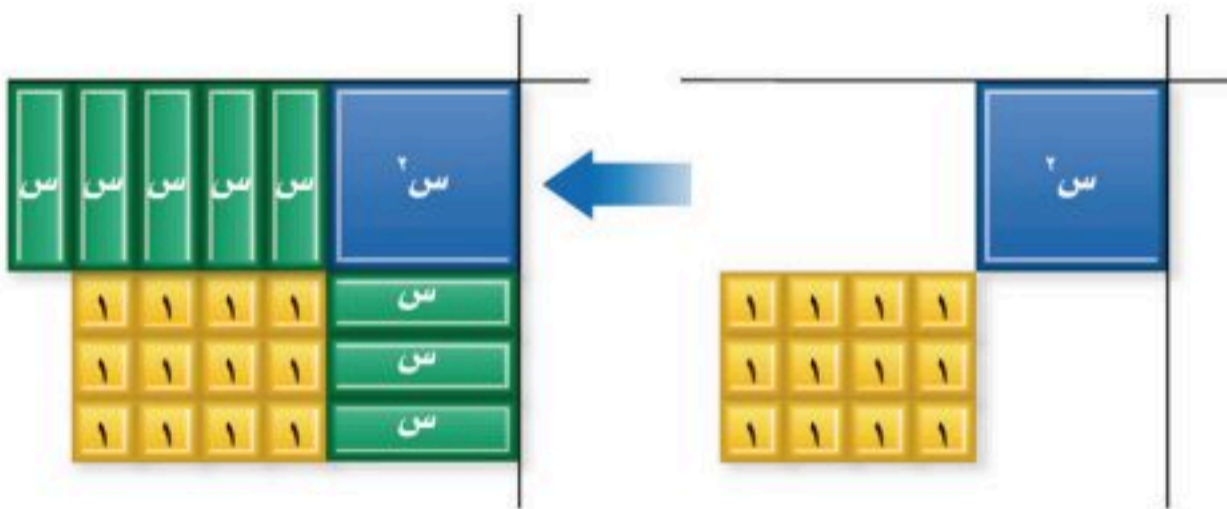
إذن: $s^2 + 4s + 3 = (s+3)(s+1)$.

نشاط ٢

تحليل العبارة: $s^2 + 8s + 12$ ج

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $s^2 + 8s + 12$

الخطوة ١: مثل $s^2 + 8s + 12$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع بطاقة s^2 في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً. وبما أن $12 = 3 \times 4$ ، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ و ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات s ، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.

الخطوة ٣: رتّب بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ و ٦ ثم أكمل المستطيل،

وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات s لتكوين

المستطيل. ويكون عرض المستطيل $s+2$ ، وطوله $s+6$

إذن $s^2 + 8s + 12 = (s+6)(s+2)$.



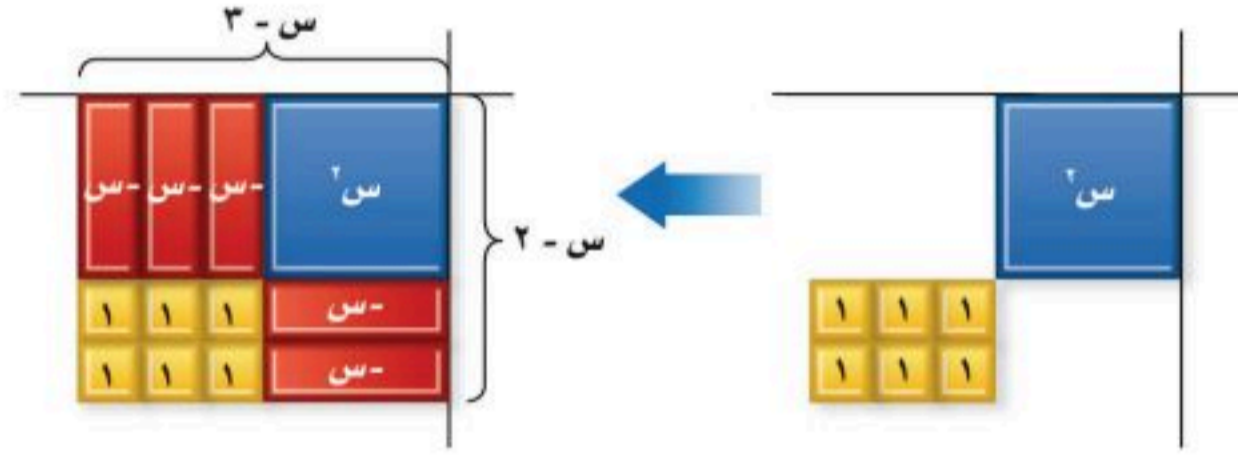
نشاط ٣ تحليل العبارة: $س^2 - ٥س + ٦$ ج

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 - ٥س + ٦$

الخطوة ١: مثل $س^2 - ٥س + ٦$



الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب. ورتب البطاقات ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ٢ و ٣



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $س$. فيكون بذلك عرضه $س - ٢$ ، وطوله $س - ٣$ إذن $س^2 - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$

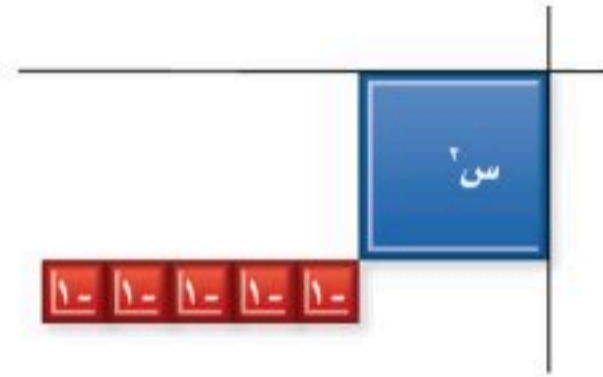
نشاط ٤ تحليل العبارة: $س^2 - ٤س - ٥$ ج - ب

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 - ٤س - ٥$

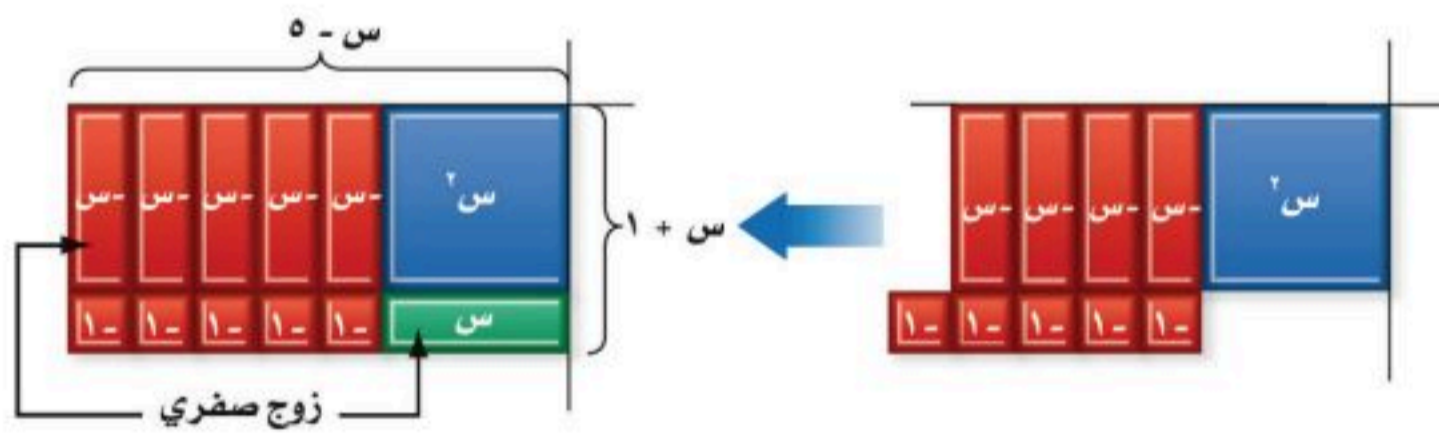
الخطوة ١: مثل $س^2 - ٤س - ٥$



الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب، ورتب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ١ و ٥



الخطوة ٣: ضع البطاقات $س$ كما في الشكل. وتذكر أنه يمكنك إضافة أزواج صفرية دون تغيير قيمة كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجاً صفرياً من البطاقات $س$ ، $س$. لذا فإن $س^2 - ٤س - ٥ = (س - ٥)(س + ١)$



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

(٤) $س^2 - ٧س + ١٢$

(٣) $س^2 + ٣س - ٤$

(٢) $س^2 + ٦س + ٨$

(١) $س^2 + ٣س + ٢$

استعمل الرسم بمخطط لتبين إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا:

(٨) $س^2 - ٢س - ٤$

(٧) $س^2 - ٤$

(٦) $س^2 - ٥س - ٦$

(٥) $س^2 + ٣س + ٦$

(٩) اكتب كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحديد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟





المعادلات التربيعية: $س^٢ + ب س + ج = ٠$

لماذا؟

بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة $٣٦ م^٢$ ، فما بعدها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ ومجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل $س^٢ + ب س + ج$: تعلمت كيف تضرب ثنائيي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لنتائج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.



$$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٤س + ٣س + ١٢ = س^٢ + ٧س + ١٢$$

$$= س^٢ + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= س^٢ + ٧س + ١٢ \quad \text{بسط.}$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و ٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما. لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)$$

$$(س + م)(س + ن) = س^٢ + (م + ن)س + م ن \quad \text{لتكن } م = ٣, ن = ٤$$

$$= س^٢ + (م + ن)س + م ن \quad \text{الإبدال (+)}$$

$$س^٢ + ب س + ج = س^٢ + (م + ن)س + م ن \quad \text{ب } م + ن = ب, م ن = ج$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م و ن، والحد الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^٢ + ب س + ج$.

فيما سبق

درست ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

■ أحل ثلاثية حدود على الصورة:

$$س^٢ + ب س + ج = ٠$$

■ أحل المعادلات على الصورة:

$$س^٢ + ب س + ج = ٠$$

المضردات

المعادلة التربيعية

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

تحليل $س^٢ + ب س + ج$

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^٢ + ب س + ج$ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما ج، ثم اكتب $س^٢ + ب س + ج$ على الصورة $(س + م)(س + ن)$.

الرموز: $س^٢ + ب س + ج = (س + م)(س + ن)$ ، حيث $م + ن = ب$ ، $م ن = ج$

مثال: $س^٢ + ٦س + ٨ = (س + ٢)(س + ٤)$. لأن $٦ = ٢ + ٤$ ، $٨ = ٢ \times ٤$

يكون لعاملي ج الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.



وزارة التعليم

خمن وتحقق

عند تحليل ثلاثية الحدود،
اعمل تخميناً مدروساً،
وتحقق من المعقولة، ثم
عدّل التخمين حتى تصل
إلى الإجابة الصحيحة.

مثال ١ تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما يكون ب، ج موجبين

حلل: $س^٢ + ٩س + ٢٠$.

بما أن ج، ب موجبان في ثلاثية الحدود، $ب = ٩$ ، $ج = ٢٠$. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، وأوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
٢٠، ١	٢١
١٠، ٢	١٢
٥، ٤	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

اكتب القاعدة

$$م = ٤، ن = ٥$$

$$س^٢ + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س + ٤)(س + ٥)$$

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

$$س^٢ + ٩س + ٢٠ = (س + ٤)(س + ٥) = س^٢ + ٥س + ٤س + ٢٠ = س^٢ + ٩س + ٢٠$$

طريقة التوزيع بالترتيب

بسط.

$$س^٢ + ٩س + ٢٠ =$$

تحقق من فهمك

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(أ) $٩ + ١٠ن + ن^٢$

(ب) $٢٤ + ١١د + د^٢$

إذا كانت ب سالبة، وج موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

مثال ٢ تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما تكون ب سالبة، ج موجبة

حلل: $س^٢ - ٨س + ١٢$

بما أن ج موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود، $ب = -٨$ ، $ج = ١٢$ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعهما -٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
١٢-، ١-	١٣-
٦-، ٢-	٨-
٤-، ٣-	٧-

العاملان الصحيحان هما ٢-، ٦-

اكتب القاعدة

$$م = -٢، ن = -٦$$

$$س^٢ - ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س - ٢)(س - ٦)$$

تحقق: مثل المعادلتين: $ص = س^٢ - ٨س + ١٢$ ، $ص = (س - ٢)(س - ٦)$

بيانياً على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية

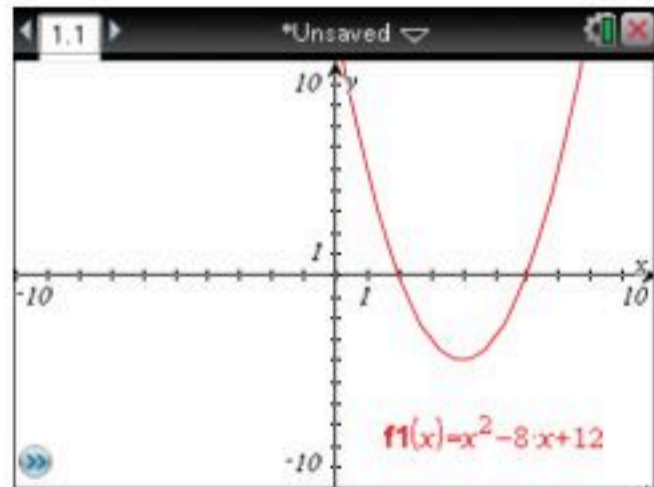
الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓

تحقق من فهمك

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(أ) $٢٨ + و + و^٢$

(ب) $٢١ - ٢٢م + م^٢$



إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل
الصحيحة فليس هناك
ضرورة لاختبار العوامل
الأخرى. فمثلاً، العاملان
الصحيحان في المثال ٢ هما:
٢- و ٦-، لذا فلا داعي
لاختبار العاملين:
٣- و ٤-



تمثل القيمة المطلقة للعدد
ن المسافة بين العدد
والصفر على خط الأعداد.
وتُكتب على الصورة |ن|.

عندما تكون جـ سالبة، يكون لعاملها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيها سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مثال ٣ تحليل $س^2 + ب س + ج$ عندما تكون جـ سالبة

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(أ) \quad س^2 + ٢س - ١٥$$

في ثلاثية الحدود هذه $ب = ٢$ ، $ج = -١٥$ وبما أن جـ سالبة. فإن م و ن عدنان مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجباً.

اكتب أزواجاً من عوامل العدد -١٥ ، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد -١٥	مجموع العاملين
$١٥، ١-$	١٤
$٥، ٣-$	٢

العاملان الصحيحان هما $-٣، ٥$

اكتب القاعدة

$$م = -٣، ن = ٥$$

طريقة التوزيع بالترتيب

بسّط

$$س^2 + ٢س - ١٥ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س + ٥)(س - ٣)$$

$$\text{تحقق: } (س - ٣)(س + ٥) = س^2 + ٢س - ١٥$$

$$= س^2 + ٢س - ١٥ \quad \checkmark$$

$$(ب) \quad س^2 - ٧س - ١٨$$

في ثلاثية الحدود هذه $ب = -٧$ ، $ج = -١٨$ ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالباً.

اكتب أزواجاً من عوامل -١٨ ، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما -٧ .

عوامل العدد -١٨	مجموع العاملين
$١٨، ١-$	$١٧-$
$٩، ٢-$	$٧-$
$٣، ٦-$	$٣-$

العاملان الصحيحان هما $-٢، ٩$

اكتب القاعدة

$$م = ٩، ن = -٢$$

$$س^2 - ٧س - ١٨ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س + ٩)(س - ٢)$$

$$\text{تحقق: } (س - ٢)(س + ٩) = س^2 - ٧س - ١٨$$

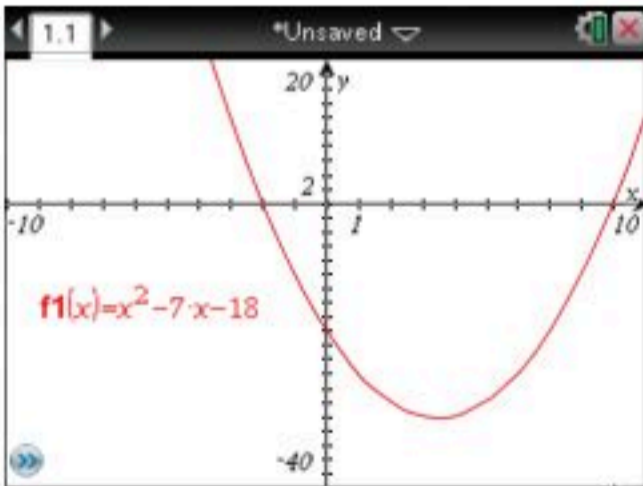
$$= س^2 - ٧س - ١٨$$

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّت بصورة صحيحة. \checkmark

تحقق من فهمك \checkmark

$$(أ٣) \quad س^2 + ١٣س - ٤٨$$

$$(ب٣) \quad س^2 - ٢س - ٢٤$$



حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة المعادلات التربيعية على الصورة القياسية:

$س^2 + ب س + ج = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال

خاصية الضرب الصفري

مثال ٤

حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^2 + ٦س = ٢٧$ ، وتحقق من صحة الحل.

المعادلة الأصلية
اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
حلل إلى العوامل
خاصية الضرب الصفري
حل كل معادلة

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$س^2 + ٦س - ٢٧ = ٠$$

$$٠ = (س + ٩)(س - ٣)$$

$$س - ٣ = ٠ \text{ أو } س + ٩ = ٠$$

$$س = ٣ \quad س = -٩$$

تحقق: عوض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (٣)^2 + ٦(٣)$$

$$٢٧ = ٩ + ١٨ \quad \checkmark$$

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (-٩)^2 + ٦(-٩)$$

$$٢٧ = ٨١ - ٥٤ \quad \checkmark$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$٠ = ١٨ - س^2 + ٣س \quad (ب٤)$$

$$٧٠ = ع^2 - ٣ع \quad (١٤)$$

مثال ٥ من واقع الحياة

حل المسألة بالتحليل



تصميم: يصمم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بـ ٢ بوصة. ومساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض × الطول

حل: بما أن عرض اللوحة = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = $٢ + ٦ = ٨$

اكتب المعادلة

$$٦١٦ = (٦ + ض)ض$$

اضرب

$$٦١٦ = ٦ض + ض^2$$

اطرح ٦١٦ من كل طرف

$$٠ = ٦١٦ - ٦ض - ض^2$$

حلل

$$٠ = (٢٨ + ض)(٢٢ - ض)$$

خاصية الضرب الصفري

$$٠ = ٢٨ + ض \quad \text{أو} \quad ٠ = ٢٢ - ض$$

حل كل معادلة

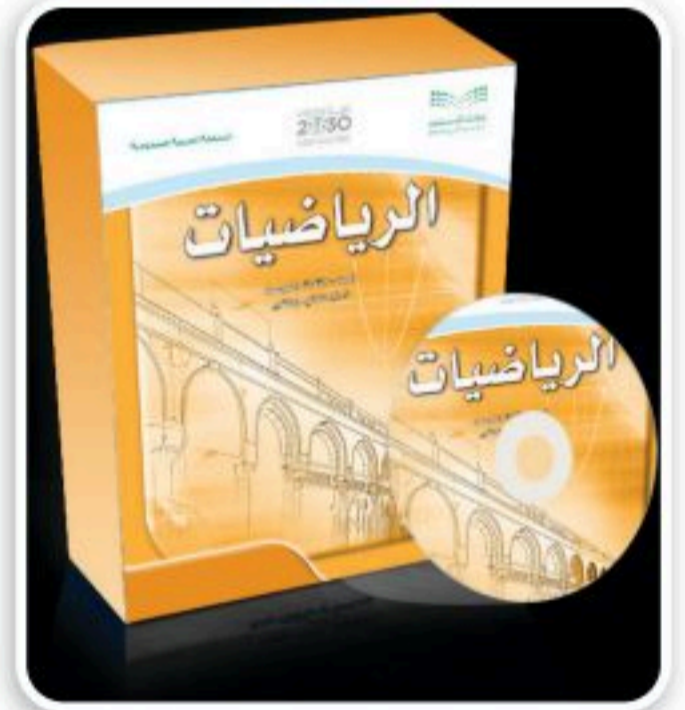
$$ض = -٢٨ \quad ض = ٢٢$$

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = $٢٢(٦ + ٢٢) = ٦١٦$ بوصة مربعة، وهي مساحة

اللوحة. \checkmark

تحقق من فهمك



الربط مع الحياة

تُصمَّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

(٥) **هندسة:** متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^٢. فما ارتفاعه؟



الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(1) \text{ س}^2 + 14\text{س} + 24$$

$$(2) \text{ ص}^2 - 7\text{ص} - 30$$

$$(3) \text{ ن}^2 + 4\text{ن} - 21$$

$$(4) \text{ م}^2 - 15\text{م} + 50$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(5) \text{ س}^2 - 4\text{س} - 21 = 0$$

$$(6) \text{ ن}^2 - 3\text{ن} + 2 = 0$$

$$(7) \text{ س}^2 - 15\text{س} + 54 = 0$$

$$(8) \text{ س}^2 + 12\text{س} - 32 = 0$$

$$(9) \text{ س}^2 - 72 = 0$$

$$(10) \text{ س}^2 - 10\text{س} - 24 = 0$$

مثال ٥

(١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا للصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغرة؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(12) \text{ س}^2 + 17\text{س} + 42$$

$$(13) \text{ ص}^2 - 17\text{ص} + 72$$

$$(14) \text{ أ}^2 - 18\text{أ} - 48$$

$$(15) \text{ ن}^2 - 2\text{ن} - 35$$

$$(16) 44\text{ه} + 15\text{ه} + 2\text{ه}^2$$

$$(17) 40\text{س} - 22\text{س} + 2\text{س}^2$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(18) \text{ س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0$$

$$(19) \text{ ص}^2 + 2\text{ص} = 20$$

$$(20) \text{ س}^2 - 6\text{س} = 27$$

$$(21) \text{ ج}^2 + 10\text{ج} + 9 = 0$$

$$(22) \text{ ن}^2 - 120 = 7\text{ن}$$

$$(23) \text{ ه}^2 + 48 = 16\text{ه}$$

مثال ٥

(٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦ سم^٢، ويزيد ارتفاعه ٦ سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

(٢٥) **هندسة:** تمثّل العبارة (س^٢ - ٤س - ١٢) سم^٢ مساحة مستطيل طوله (س + ٢) سم. فما عرضه؟

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(26) \text{ ك}^2 + 11\text{ك} + 18$$

$$(27) \text{ س}^2 - 6\text{س} + 5\text{ص}^2$$

$$(28) \text{ أ}^2 + 10\text{أ} - 39\text{ب}^2$$

(٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^٢.

(أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه.

(ب) حل المعادلة.

(ج) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكل منهما؟



(٣٠) هندسة: اكتب عبارة تمثل محيط المستطيل الذي مساحته $m = s^2 + 13s - 90$.

(٣١) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما يكون المعامل الرئيس للعبارة التربيعية لا يساوي ١.

(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي، ثم أكمله:

ضرب ثنائي حد	ناتج ضرب ثنائيي الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	أ $s^2 + ب s + ج$	م $X ن$	أ $X ج$
$(٢س + ٣)(٤س + ٤)$	$٢س^٢ + ٨س + ٣س + ١٢$	$٢س^٢ + ١١س + ١٢$	٢٤	٢٤
$(١س + ٣)(٥س + ٥)$				
$(١س - ٢)(١س + ٤)$				
$(٥س + ٣)(٢س - ٤)$				

(ب) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعددان أ، ج؟

(ج) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟

(د) لفظياً: صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة $أس^٢ + ب s + ج$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٢) اكتشاف الخطأ: حلل كل من خليل وماجد العبارة: $s^٢ + ٦س - ١٦$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

خليل
 $s^٢ + ٦س - ١٦ = (س - ٢)(س + ٨)$

ماجد
 $s^٢ + ٦س - ١٦ = (س + ٢)(س - ٨)$

تحذّر: أوجد جميع قيم ه التي تجعل كل كثيرة حدود في كل مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

(٣٣) $s^٢ + هس - ١٩$ (٣٤) $s^٢ + هس + ١٤$ (٣٥) $s^٢ - ٨س + ه$ ، $ه < ٠$

(٣٦) تحذّر: حلل العبارة: $(٤س - ٥)٣ + ٢(٥س - ٤) - ٧٠$.

تدريب على اختبار

(٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟

(أ) $٦ = ن - ٢١$ (ب) $٦ = ٢١ - ن$
 (ج) $٦ = ن + ٢١$ (د) $٢١ - ن = ٦$

(٣٧) هندسة: ما العبارة التي تمثل طول المستطيل في الشكل المجاور؟

٣
 $١٨ = م - ٢س - ٣س - ١٨$
 ٤

(أ) $٥ + س$ (ب) $٦ + س$
 (ج) $٦ - س$ (د) $٥ - س$



مراجعة تراكمية

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

$$(٣٩) \quad ٢م^٣ل - ١٦م^٢ل + ٨م ل \quad (٤٠) \quad ٢أس + ٦سج + أب + ٣بج \quad (٤١) \quad س٢ - سص - سص + ص٢$$

(٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعدها ٤٢٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم × ٢٠ سم، ٣٠ سم × ٣٠ سم، ٢٠ سم × ١٥ سم، ٢٢ سم × ٣٠ سم. فأَيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧-١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي:

$$(٤٣) \quad ٦م - س٤ + ٣رس - ٢ر \quad (٤٤) \quad ٣أس - ٦بس + ٨ب - ٤أ \quad (٤٥) \quad ٢د٢ج + ٢فج + ٤د٢ه + ٤فه$$



وزارة التعليم

الدرس ٧-٣: المعادلات التربيعية: س^٢ + بس + ج = ٠
٨١
2025 - 1447



حلل كل وحيدة حدًّا فيما يأتي تحليلًا تامًّا: (الدرس ٧-١)

(١) $١٦س٣ص٢$

(٢) $٣٥بج٤$

(٣) $٢٠م٥ن٢$

(٤) $١٣س٣ص٣$

(٥) **مساحة ممر:** تبلغ مساحة ممر $١٢م٢$ ، أوجد جميع أزواج الأعداد الكلية التي يمكن أن تمثل طولًا وعرضًا للممر.

(الدرس ٧-١)

أوجد (ق.م.أ) لكل مجموعة وحيدات حدًّا فيما يأتي:

(٦) $١٠ب، ٢٠ب٢، ٢٥ب$

(٧) $١٣ج، ٢٥د$

(٨) $٢١بج، ٣٥ب، ٥٦بج٣$

(٩) **ترتيب:** يريد عامل ترتيب ٢٤ زوجًا من الأحذية على أرفف محل، بحيث يضع نفس عدد الأزواج على كل رف، ويضع على الأقل ٤ أزواج على كل رف، ويستخدم رفين على الأقل، اذكر عدد الأزواج الممكنة على كل رف، وعدد الأرفف.

(الدرس ٧-١)

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود التالية:

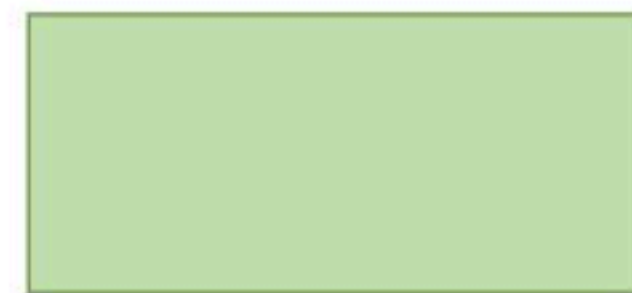
(الدرس ٧-٢)

(١٠) $٣س٣ص٩$

(١١) $٦بج + ١٢بج٢ + ١٨ج$

(١٢) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أذناه تساوي $٣س٢ + ٦س - ١٢$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

(الدرس ٧-٢)



$٢س + ٤$

(أ) وحدتان

(ب) ٣ وحدات

(ج) ٤ وحدات

(د) ٦ وحدات

حلل كل كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

(١٣) $٤٠ + ٥٥ج$

(١٤) $٣س٣ + ٦س٢ + ٦س + ٢$

(١٥) $٥ب٢ - ٢٥ب - ٥$

حل كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

(١٦) $٢س(س - ٥) = ٠$

(١٧) $٦ب٢ - ٣ب = ٠$

(١٨) $١٥ = ٢ج$

حلل كل كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٣)

(١٩) $٢س٢ - ٤س - ٢١$

(٢٠) $٢س٢ - ١٠س + ٢٤$

(٢١) $٢س٢ + ٤س - ٢١$

حل كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

(٢٢) $١٤ = ٢س - ٥س$

(٢٣) $٠ = ١٨ - ٣س - ٢س$

(٢٤) $٢٤ + ٢س = ١٠س$

(٢٥) **اختيار من متعدد:** يزيد طول مستطيل على عرضه بمقدار

$٢سم$ ، فما طول المستطيل، إذا كانت مساحته $٤٨سم٢$ ؟

(ج) $٦سم$

(أ) $٤٨سم$

(د) $٢سم$

(ب) $٨سم$



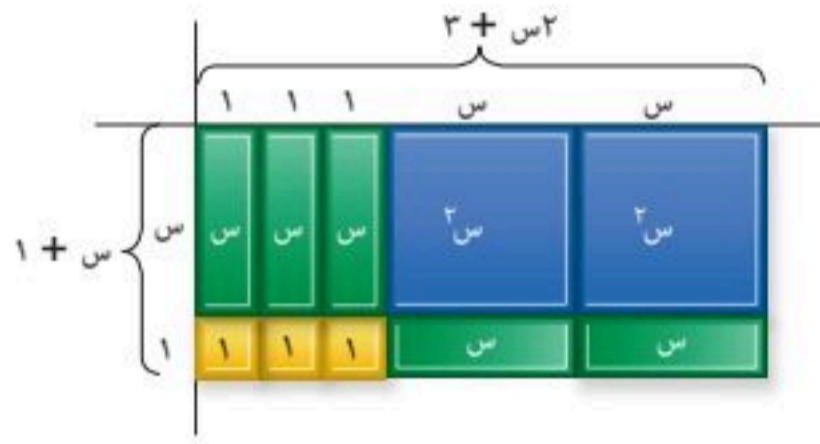


المعادلات التربيعية: أس^٢ + ب س + ج = . لماذا؟

يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعبارة $٢ن - ٣٠ + ٣٠$ ؛ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة إلى عواملها يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل أس^٢ + ب س + ج : حللت في الدرس السابق عبارات تربيعية على الصورة: أس^٢ + ب س + ج، أ = ١.

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها $١ \neq$ في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما (س + ١)، (٣ + ٢س)، وهما عاملا $٢س + ٥س + ٣$. يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه العبارة.



الخطوة ١: طبّق القاعدة:

$$٢س٢ + ٥س + ٣ = ٢س٢ + ٣س + ٢س + ٣$$

الخطوة ٢: أوجد عددين ناتج ضربهما $٣ \times ٢ = ٦$ ومجموعهما ٥.

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
٦، ١	٧
٣، ٢	٥

الخطوة ٣: استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

$$٢س٢ + ٥س + ٣ = ٢س٢ + ٣س + ٢س + ٣$$

$$= ٢س٢ + ٣س + ٢س + ٣$$

$$= (٢س٢ + ٢س) + (٣س + ٣)$$

$$= ٢س(س + ١) + ٣(س + ١)$$

$$= (س + ١)(٢س + ٣)$$

إذن: $٢س٢ + ٥س + ٣ = (س + ١)(٢س + ٣)$.

اكتب القاعدة

$$٣ = ٢، ٣ = ٣$$

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

(س+١) عامل مشترك

مفهوم أساسي

تحليل أس^٢ + ب س + ج

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أس^٢ + ب س + ج، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ ج، ثم اكتب أس^٢ + ب س + ج على الصورة أس^٢ + م س + ن س + ج، ثم حلّل بتجميع الحدود.

مثال: $٥س٢ - ١٣س + ٦ = ٥س٢ - ١٠س - ٣س + ٦ = (٥س - ٣)(س - ٢)$

$$= (٥س - ٣)(س - ٢) + (٢س - ٦)(س - ٢)$$

$$= (س - ٢)(٥س - ٣ + ٢س - ٦)$$



وزارة التعليم

مثال ١

تحليل أس^٢ + ب س + ج

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

$$(أ) ٧س٢ + ٢٩س + ٤$$

في ثلاثية الحدود أعلاه، أ = ٧، ب = ٢٩، ج = ٤. أوجد عددين ناتج ضربهما $٤ \times ٧ = ٢٨$ ، ومجموعهما ٢٩. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩.

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل
٢٨، ١	٢٩

العوامل الصحيحة ١، ٢٨

استخدم القاعدة.

$$١ = م، ٢٨ = ن$$

جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّل بإخراج (ق. م. أ)

(٧س + ١) عامل مشترك

$$٧س٢ + ٢٩س + ٤ = ٧س٢ + م س + ن س + ٤$$

$$٧س٢ + ١ س + ٢٨ س + ٤ =$$

$$= (٧س٢ + ١ س) + (٢٨ س + ٤)$$

$$= س(٧س + ١) + (٢٨ س + ٤)$$

$$= (٧س + ١)(س + ٤)$$

$$(ب) ٣س٢ + ١٥س + ١٨$$

(ق. م. أ) للحدود ٣س^٢، ١٥س، ١٨، هو ٣. حلّل بإخراج العامل ٣.

خاصية التوزيع

أوجد عاملين للعدد ٦ مجموعهما ٥

$$٣س٢ + ١٥س + ١٨ = ٣(س٢ + ٥س + ٦)$$

$$= ٣(س + ٢)(س + ٣)$$

تحقق من فهمك

$$(أ) ٥س٢ + ١٣س + ٦$$

$$(ب) ٦س٢ + ٢٢س - ٨$$

مثال ٢

تحليل أس^٢ - ب س + ج

حلل كثيرة الحدود ٣س^٢ - ١٧س + ٢٠.

في ثلاثية الحدود أعلاه أ = ٣، ب = -١٧، ج = ٢٠. وبما أن ب سالبة، فإن م + ن ستكون سالبة أيضًا، وبما أن ج موجبة، فإن م ن ستكون موجبة.

لتحديد م، ن كوّن قائمة بالعوامل السالبة لـ أ ج = ٦٠ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما -١٧

عوامل العدد ٦٠	مجموع العاملين
٣٠، -٢	-٣٢
٢٠، -٣	-٢٣
١٥، -٤	-١٩
١٢، -٥	-١٧

العاملان الصحيحان هما -٥، -١٢

$$١٢ = -ن، -٥ = م$$

جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

خاصية التوزيع

$$٣س٢ - ١٧س + ٢٠ = ٣س٢ - ١٢س - ٥س + ٢٠$$

$$= (٣س٢ - ١٢س) + (-٥س + ٢٠)$$

$$= ٣س(س - ٤) + (-٥)(س - ٤)$$

$$= (٣س - ٥)(س - ٤)$$

تحقق من فهمك

$$(أ) ١٠س٢ - ٣٥س + ٣٠$$

$$(ب) ١٢س٢ - ٢٠س - ١$$



تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية**.

مثال ٣ تحديد كثيرة الحدود الأولية

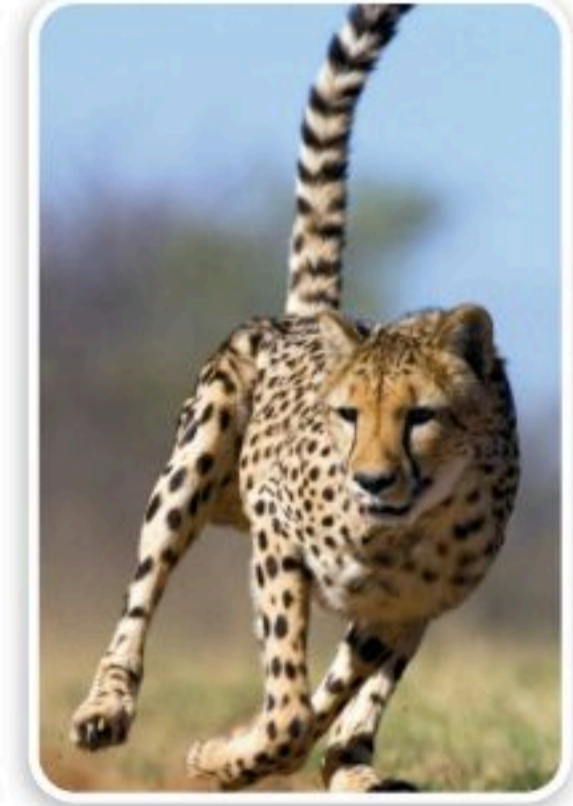
حلل العبارة: $٤س^٢ - ٣س + ٥$ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

مجموع العاملين	عوامل العدد ٢٠	في ثلاثية الحدود السابقة $٤ = أ$ ، $٣ = ب$ ، $٥ = ج$
٢١-	١-، ٢٠-	وبما أن ب سالبة، فإن م + ن سالبة. وبما أن ج موجبة
٩-	٥-، ٤-	فإن م ن موجبة، لذا يكون كل م و ن سالبًا. كَوْن قائمة
١٢-	١٠-، ٢-	بأزواج عوامل العدد ٢٠. وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما -٣.

لا يوجد عاملان مجموعهما -٣. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية $٤س^٢ - ٣س + ٥$ أولية.

تحقق من فهمك

$$(١٣) ٤ر^٢ - ٢ر + ٧ \quad (٣ب) ٥س^٢ + ٣س - ٥$$



الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثوانٍ فقط.

حل معادلات بالتحليل: تمثل المعادلة $٥ن^٢ + ٢ع + ن + ل$ ارتفاع جسم مقذوف لأعلى، حيث تمثل (ل) الارتفاع بالمتراً، و (ن) الزمن بالثواني، و (ع) السرعة الابتدائية م / ثانية، و (ل) الارتفاع الابتدائي بالمتراً. ويمكن حل هذه المعادلة بعد كتابتها على الصورة $٥س^٢ + ٢ب + س + ج = ٠$ بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال ٤ من واقع الحياة حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

حياة برية: افترض أن فهداً يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ مترًا؟

معادلة الارتفاع	$٥ن^٢ + ٢ع + ن + ل = ٠$
عوض $ل = ٢$ ، $ع = ١١$ ، $٠ = ل$	$٥ن^٢ + ٢١١ + ن + ٢ = ٠$
اطرح ٢ من كلا الطرفين	$٥ن^٢ + ٢١١ + ن - ٢ = ٠$
اضرب كلا الطرفين في -١	$٥ن^٢ - ٢١١ - ن + ٢ = ٠$
حلل	$٠ = (٥ن - ١١)(ن + ٢)$
خاصية الضرب الصفري	$٥ن - ١١ = ٠$ أو $ن + ٢ = ٠$
حل كل معادلة	$٥ن = ١١$
	$ن = \frac{١١}{٥}$

الإجابتان $\frac{١١}{٥}$ و ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢ م في أثناء صعوده، وإلى اثنتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تحقق من فهمك

(٤) **فيزياء:** قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠ م. والمعادلة

$$٥ن^٢ + ٢١٦ + ن + ٢٠ = ٠$$

تمثل ارتفاع الكرة (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟

تنبيه

إشارة السالب

حافظ على (العدد -١) معامل $ن^٢$ ، الذي تم إخرجه خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في -١ بدلاً من ذلك.

الأمثلة ١ - ٣

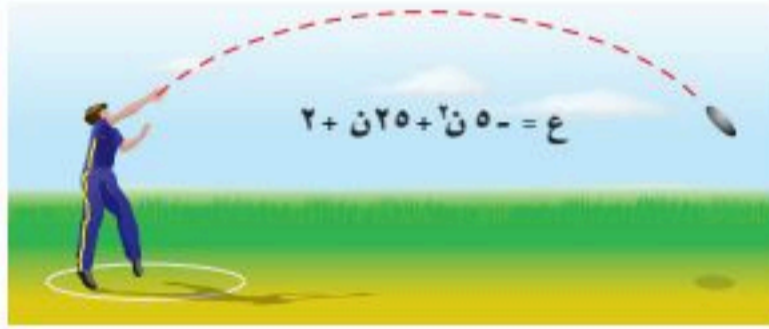
حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(١) \quad ٥٦ + ٢س٢ + ٢٢س + ٥٦ \quad (٢) \quad ٤ + ٣س - ٢س٥ \quad (٣) \quad ٢٠ - ١١س - ٢س٣$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(٤) \quad ٠ = ٩ + ٢س٢ + ٩س \quad (٥) \quad ٠ = ٨ + ٣س - ٢س١٠ \quad (٦) \quad ٠ = ٣٠ + ٢س٢ - ١٧س$$



(٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.

(أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

(ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٨) \quad ٢٤ + ٢س٥ + ٣٤س \quad (٩) \quad ٧٠ + ٢س٤ + ٣٨س \quad (١٠) \quad ٩ - ٢س٢ - ٣س٣$$

$$(١١) \quad ١٠ + ٢س٤ - ١٣س \quad (١٢) \quad ٦ + ٢س٢ + ٣س٦ \quad (١٣) \quad ٤٥ + ١٢س٢ + ٦٩س$$

$$(١٤) \quad ٧ + ٢س٤ - ٥س \quad (١٥) \quad ٢٤ + ٢س٥ + ٢٣س \quad (١٦) \quad ١٥ + ٢س٣ - ٨س$$

مثال ٤

(١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثله المعادلة $٤ = ٥س٢ + ٩س + ٢$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(١٨) \quad ٠ = ١٨ - ٢س٢ + ٩س \quad (١٩) \quad ٠ = ١٥ + ٢س٤ + ١٧س \quad (٢٠) \quad ١٦ = ٢س٣ - ٢٦س + ٢س٢$$

$$(٢١) \quad ١٥ = ٢س٢ + ١٣س - ١٥ \quad (٢٢) \quad ٢ = ٢س٣ + ٥س - ٢ \quad (٢٣) \quad ٣٠ = ٤س٢ + ١٩س - ٣٠$$

(٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربع العدد ١١ مضافاً إليها ١١ مثلاً للعدد يساوي ٢ . ما القيم الممكنة لـ $س$ ؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٢٥) \quad ٢٠ - ٢س٦ - ٢٣س \quad (٢٦) \quad ١٤ - ٢س٤ - ١٥س \quad (٢٧) \quad ٨ + ٢س٥ - ١٨س$$

$$(٢٨) \quad ٣٥ - ٢س٦ + ٣١س \quad (٢٩) \quad ١٢ - ٢س٤ + ٥س \quad (٣٠) \quad ٢٠ + ٢س١٢ - ١٢س$$



(٣١) **تخطيط:** خططت بلدية إحدى المدن لبناء متنزه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعبارة: $٦٦٠س^٢ + ٥٢٤س + ٨٥$. حلل هذه العبارة لإيجاد ثنائيتي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثل البعدين الممكنين للمتنزه. وإذا كانت $س = ٨$ ، فما محيط المتنزه؟



الربط مع الحياة

هيأت أمانة منطقة الرياض ٣٦٢ مشروعاً بيئياً وترفيهياً موزعة على مختلف أحياء مدينة الرياض على مساحة تتجاوز نصف مليار متر مربع.

(٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواع خاصة من كثيرات الحدود.

(أ) هندسياً: ارسم مربعاً طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعاً أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟

(ب) هندسياً: قصّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟

(ج) تحليلياً: ارسم خطاً قطرياً بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكلاً مستطيلاً. ما بُعدا المستطيل الناتج؟

(د) تحليلياً: اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيتي حد.

(هـ) لفظياً: أكمل العبارة $٢ - ٢ = ٢$ لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٣) **اكتشف الخطأ:** حل كل من زكريا وسامي المعادلة $٦س - ٢ = ١٢$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

سامي

$$١٢ = ٦س - ٢$$

$$١٢ = (٦س - ١)$$

$$١٢ = ٦س - ١$$

$$١٣ = ٦س \text{ أو } ١٣ = ٦س$$

زكريا

$$١٢ = ٦س - ٢$$

$$٠ = ٦س - ١٢$$

$$٠ = (٣س - ٤)(٣س + ٤)$$

$$٠ = ٣س - ٤ \text{ أو } ٠ = ٣س + ٤$$

$$س = \frac{٤}{٣} \text{ أو } س = -\frac{٤}{٣}$$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية بمعاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ حلين لها. فسّر ذلك.

(٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لـ م و ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة $٢س + ٢س + ج$



تدريب على اختبار

(٣٧) ما مجموعة حل المعادلة $س^2 + ٢س - ٢٤ = ٠$ ؟

(ج) $\{٨, ٣-\}$

(أ) $\{٦, ٤-\}$

(د) $\{٦, ٤-\}$

(ب) $\{٨, ٣-\}$

(٣٦) إجابة قصيرة: لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ ٨ سنوات، والأخرى أصغر منها بستين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٣-٧)

$$(٤٠) ع^٢ + ١٥ع + ٣٦$$

$$(٣٩) س^٢ - ٥س - ٢٤$$

$$(٣٨) س^٢ - ٩س + ١٤$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٢-٧)

$$(٤٣) ٠ = س^٢ - ٢٠س$$

$$(٤٢) ٠ = (٦ + ص)(١ - ص)$$

$$(٤١) ٠ = (٩ - أ)$$

(٤٤) حلّ المتباينة المركبة $٢ + ك < ١٢$ و $٢ + ك \geq ١٨$ ، ثم مثل مجموعة الحل على خط الأعداد. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

$$(٤٨) \sqrt{١٠٠٧}$$

$$(٤٧) \sqrt{١٢١٧}$$

$$(٤٦) \sqrt{٦٤٧}$$

$$(٤٥) \sqrt{١٦٧}$$





المعادلات التربيعية : الفرق بين مربعين

لماذا؟

يستعمل مصممو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.



فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحلل ثنائية حد على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المضردات

الفرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين: تذكر أنك تعلمت ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما، ويشير ناتج الضرب هذا إلى **الفرق بين المربعين**. لذا فالصورة المحللة للفرق بين مربعين تسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

أضف إلى مطويتك
مفهوم أساسي

الفرق بين مربعين

الرموز: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو $(a - b)(a + b)$

أمثلة: $25 - 4 = (5 + 2)(5 - 2)$ أو $(5 - 2)(5 + 2)$

$64 - 9 = (8 + 3)(8 - 3)$ أو $(8 - 3)(8 + 3)$

الرموز: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو $(a - b)(a + b)$

أمثلة: $25 - 4 = (5 + 2)(5 - 2)$ أو $(5 - 2)(5 + 2)$

$64 - 9 = (8 + 3)(8 - 3)$ أو $(8 - 3)(8 + 3)$

مثال ١ تحليل الفرق بين مربعين

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$أ) 16h^2 - 9a^2$$

اكتب العبارة على صورة $a^2 - b^2$
تحليل الفرق بين مربعين

$$16h^2 - 9a^2 = (4h)^2 - (3a)^2 = (4h + 3a)(4h - 3a)$$

$$ب) 121b^2 - 4e^2$$

اكتب العبارة على صورة $a^2 - b^2$
تحليل الفرق بين مربعين

$$121b^2 - 4e^2 = (11b)^2 - (2e)^2 = (11b + 2e)(11b - 2e)$$

$$ج) 27j^3 - 3k^3$$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلل بإخراج (ق. م. أ.) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

حلل بإخراج (ق. م. أ.)

$$27j^3 - 3k^3 = 3j^3(9 - k^3)$$

اكتب على الصورة $a^2 - b^2$
تحليل الفرق بين مربعين.

$$3j^3(9 - k^3) = 3j^3[(3)^2 - (k)^3] = 3j^3(3 - k)(3 + k)$$

تحقق من فهمك ✓

أ) $16h^2 - 9a^2$ (ب) $121b^2 - 4e^2$
ج) $27j^3 - 3k^3$ (د) $4 - 9v^3$

أ) $16h^2 - 9a^2$ (ب) $121b^2 - 4e^2$
ج) $27j^3 - 3k^3$ (د) $4 - 9v^3$



تنبيه

مجموع مربعين:

لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^2 + ب^2$ إلى $(أ+ب)(أ+ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $ب^٤ - ١٦$

اكتب $ب^٤ - ١٦$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$ب^٤ - ١٦ = (ب^٢)^٢ - (٤)^٢$$

$$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$$

لاحظ أن العامل $ب^٢ - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.

اكتب $ب^٢ - ٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$$

$$= (ب^٢ + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$$

(ب) $٦٢٥ - س^٤$

اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^٢ - (س^٢)^٢$$

$$= (س^٢ + ٢٥)(س^٢ - ٢٥)$$

اكتب $س^٢ - ٢٥$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= (س^٢ + ٢٥)(س^٢ - ٢٥)$$

$$= (س^٢ + ٢٥)(س + ٥)(س - ٥)$$

تحقق من فهمك

٢ جـ) $٨١ - س^٤$

٢ ب) $٤٤ - ب^٤$

١٢ أ) $١ - س^٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $٥س^٥ - ٤٥س$

حلل بإخراج (ق. م. أ.)

$$٥س^٥ - ٤٥س = ٥س(س^٤ - ٩)$$

اكتب $٩ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= ٥س[٣^٢ - (س^٢)^٢]$$

$$= ٥س(٣ + س^٢)(٣ - س^٢)$$

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملًا.

(ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

العبرة الأصلية

$$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$$

التحليل بإخراج (ق. م. أ.)

$$= ٧(س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣)$$

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= ٧[(س^٣ + ٣س^٢) - (س + ٣)]$$

حلل كل تجمّع

$$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$$

س + ٣ عامل مشترك

$$= ٧(س + ٣)(س^٢ - ١)$$

تحليل الفرق بين مربعين

$$= ٧(س + ٣)(س + ١)(س - ١)$$



تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$\begin{array}{ll} \text{(أ) } ٢ص - ٤ - ٥٠ & \text{(ب) } ٦س - ٤ - ٩٦ \\ \text{(ج) } ٢م^٢ + ٣م - ٢٥ - ٥٠م & \text{(د) } ٦٦ + ١١ر + ٢ر٦ + ٣ر^٣ \end{array}$$

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ s التي تحقق المعادلة $ص = ٢س - \frac{٩}{١٦}$ ، إذا كانت $ص = ٠$ ؟

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) صفر (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن $ص$ بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

$$\begin{aligned} \text{ص} &= ٢س - \frac{٩}{١٦} \\ ٠ &= ٢س - \frac{٩}{١٦} \\ ٢س &= \frac{٩}{١٦} \\ ٢س &= \frac{٣}{٤} \\ (٢س + \frac{٣}{٤})(٢س - \frac{٣}{٤}) &= ٠ \\ ٢س + \frac{٣}{٤} &= ٠ \quad \text{أو} \quad ٢س - \frac{٣}{٤} = ٠ \\ ٢س &= -\frac{٣}{٤} \quad \text{أو} \quad ٢س = \frac{٣}{٤} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(٤) حلّ المعادلة: $١٨س^٣ = ٥٠س$ ؟

(أ) $٠, \frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}, \frac{٥}{٣}$ (ج) $\frac{٥}{٣}, \frac{٥}{٣}, ٠$ (د) $\frac{٥}{٣}, \frac{٥}{٣}, ١$

إرشادات للدراسة

استعمال طريقة أخرى
يمكن استعمال طريقة
أخرى للحل بتعويض
البدائل في المعادلة.

المعادلة الأصلية
عوّض عن $ص$ بـ صفر
اكتب على صورة $أ - ب$
تحليل الفرق بين مربعين
خاصية الضرب الصفري
الإجابة الصحيحة جـ

تأكد

الأمثلة ٣-١

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} \text{(١) } ٩ - ٢س & \text{(٢) } ٢٥ - ٢٤س & \text{(٣) } ١٦٢ - ٣س \\ \text{(٤) } ٨١ - ٤س & \text{(٥) } ٢د - ٤د - ٣٢ف & \text{(٦) } ٢٠ر - ٤٥ن \\ \text{(٧) } ٢٥٦ن - ٤ج & \text{(٨) } ٢ج - ٣ج + ٣ج - ٢ج - ٣ج & \text{(٩) } ٣ن + ٢ن - ٤٨ن - ٣٢ن \end{array}$$

مثال ٤

(١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة

$$\frac{١}{٢٤}ع = ٢ف$$

عبر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه العجلات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر العجلات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة؟

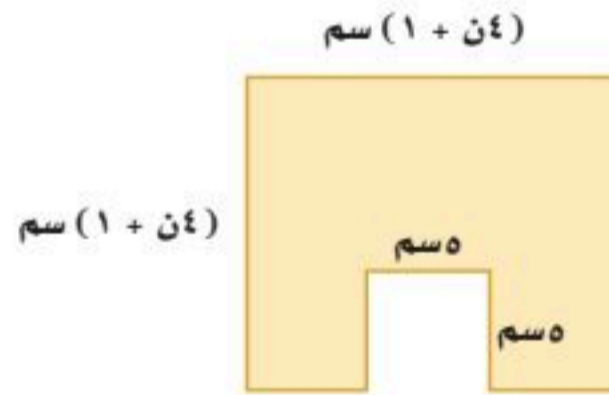
الأمثلة ٣-١

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

- (١١) $١٢١ - ٢$ (١٢) $٤ - ٤ك$
 (١٣) $٦ - ٤ن$ (١٤) $٢ - ٩ن$
 (١٥) $٢ج٢ - ٢د٣٢$ (١٦) $٣ه٥ - ١٠٠ه١$
 (١٧) $٢٥٦ - ٤ه١$ (١٨) $٨١ + ١٦٢ن - ٢ن٣ - ٢ن٣$
 (١٩) $٢س٤ - ٤ص٢$ (٢٠) $٤ل٧ - ٤ه٧$
 (٢١) $٤ك٦ - ٤ه٥٤$ (٢٢) $٣ه٥ - ٢ه٢٠$
 (٢٣) $١٢٨ - ٢ف٦٤ - ٣ف٢ + ٣ف٢$ (٢٤) $١٩٢ - ٣ر٣$
 (٢٥) $١٢١٠ - ٣ك١٠$ (٢٦) $٣س٣ - ٤س٢٧$
 (٢٧) $٣ل٥ - ٣ل٣$ (٢٨) $٣ج٨ - ٣ج٨$
 (٢٩) $٥٠٠ + ١٠٠ - ٢ر٥ - ٣ر٥$ (٣٠) $٧ + ٣ن٣ - ٢ن٧ - ٣ن٣$
 (٣١) $٨١ - ٣م٩ + ٣م٩$ (٣٢) $٢٤٣ + ٤م٣$
 (٣٣) $٢س٦ + ٤س٦ - ٣س٣٦ - ٢س٢١٦$ (٣٤) $٣٠٠ - ٣٧٥ - ٢م١٢ + ٣م١٥$

مثال ٤

(٣٥) هندسة: يمثل الشكل المجاور مربعاً قُطِعَ منه مربع آخر.



- (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة.
 (ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضاً أنهما يُمثّلان بثنائيّتي حد.

(٣٦) مبانٍ: أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعده ٨ م، ٨ م. ثم قرّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠ م^٢، فما بُعده؟

(٣٧) كتب: نشرت إحدى دور النشر كتاباً جديداً، وتمثّل المعادلة $٢٥م - ١٢٥م$ مبيعات الكتاب، حيث (ع) تمثّل عدد النسخ المباعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

- (أ) في أي شهر يُتَوَقَّع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟
 (ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟
 (ج) ما عدد النسخ المباعة في الذروة؟



الرابط مع الحياة

على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل، ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لا يزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتداد المكتبات.



حل المعادلات بالتحليل
تذكر أن تجعل أحد طرفي
المعادلة صفراً قبل حل
المعادلة بالتحليل.

حل كل معادلة مما يأتي بالتحليل، ثم تحقق من صحة الحل:

$$(39) \quad 25s^2 = 100$$

$$(38) \quad 121 = 2s^2$$

$$(41) \quad 16 = \frac{1}{4}s^2$$

$$(40) \quad 0 = \frac{9}{16} - 2s^2$$

$$(43) \quad 0 = 81 - 2s^2$$

$$(42) \quad 0 = \frac{1}{25}s^2 - 81$$

(44) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(أ) جدولياً: انسخ الجدول أدناه وأكمه بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$4s^2 + 12s + 9$	$(3+s)(3+s)$	$4s^2 = 2(2s)$	$9 = 3^2$	
$9s^2 - 24s + 16$				
$4s^2 - 20s + 25$				
$16s^2 + 24s + 9$				

(ب) تحليلياً: اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحددين الأول والأخير.

(ج) جبرياً: اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(د) لفظياً: ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(45) **اكتشف الخطأ:** حللت كل من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسّر ذلك.

منى

$$16s^2 - 25s^2 = (4s^2 + 5s)(5s - 4s)$$

هلا

$$16s^2 - 25s^2 = (5s - 4s)(5s + 4s)$$

(46) **تحّد:** بسّط العبارة: $9 - (3+k)^2$ بتحليلها بالفرق بين مربعين.

(47) **تحّد:** حلّل: $s^2 - 81$

(48) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعطِ مثلاً مضاداً للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل".

(49) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثلاً لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تاماً إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّها.

(50) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حدّاً متغيراً في الوسط؟



تدريب على اختبار

(٥٢) أي مما يأتي يمثل مجموع حلّي المعادلة $س^2 + ٣س = ٥٤$ ؟

- (أ) ٣
(ب) ٢١
(ج) ٣
(د) ٢١

(٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة $س^2 + ١٣س + ٢٤ = ٨$ هو -٨، فما الجذر الآخر؟

- (أ) $\frac{٣}{٢}$
(ب) $\frac{٣}{٢}$
(ج) $\frac{٢}{٣}$
(د) $\frac{٢}{٣}$

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

(٥٥) $١٠س^٢ - ٢٠س + ١٠$ ص

(٥٤) $١٥ + ١٣س - ٢٥س^٢$

(٥٣) $١٤س + ١٧س^٢$

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك: (الدرس ٧-٣)

(٥٨) $٩٦ = س^٢ - ٢٢س$

(٥٧) $١٧ = ١٠س + ٢س^٢$

(٥٦) $١٨ = ٩س - ٢س^٢$

أوجد ناتج كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

(٦٢) $(٥ + س)(٥ + س)$

(٦١) $(١ - س)^٢$

(٦٠) $(٥ - س)^٢$

(٥٩) $(٣ + س)(٣ + س)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(٦٥) $(٣ + س)(٣ + س)$

(٦٤) $(٢ - س)(٢ - س)$

(٦٣) $(٦ - س)^٢$

(٦٨) $(٥ + س)(٥ + س)$

(٦٧) $(١ - س)^٢$

(٦٦) $(٥ - س)^٢$





المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $0 = 5n^2 + 0.1n$ ، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي (ل) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.



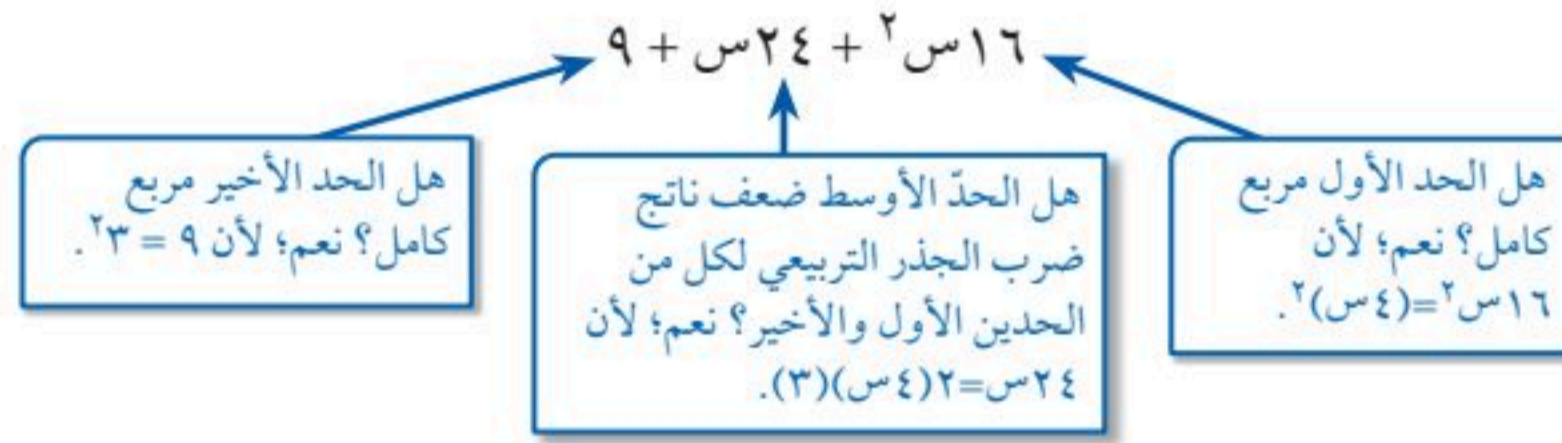
تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائي الحد $(أ + ب)^2$ ، $(أ - ب)^2$. تذكر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$\begin{aligned} (أ + ب)^2 &= (أ + ب)(أ + ب) = 2أب + أ^2 + ب^2 \\ (أ - ب)^2 &= (أ - ب)(أ - ب) = 2أب - أ^2 - ب^2 \end{aligned}$$

تكون نواتج الضرب هذه على صورة **مربع كامل ثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلًا ثلاثية الحدود $16س^2 + 24س + 9$ تشكل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.



فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المضردات

المربع الكامل ثلاثية حدود

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

$$\text{الرموز: } 2أب + أ^2 + ب^2 = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^2$$

$$2أب - أ^2 - ب^2 = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^2$$

$$\text{أمثلة: } 8س + 16 + س^2 = (س + 4)(س + 4) = (س + 4)^2$$

$$س^2 - 6س + 9 = (س - 3)(س - 3) = (س - 3)^2$$



مثال ١

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

(أ) $٩ + ١٢ص + ٤ص^٢$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص = (٢ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٢ص)(٣)$ ؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٩ + ١٢ص + ٤ص^٢$ ثلاثية حدود تشكّل مربعاً كاملاً.

$٤ص^٢ + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^٢ + ٢(٢ص)(٣) + ٣^٢$ اكتب العبارة على صورة $أ^٢ + ٢أب + ب^٢$

$(٢ص + ٣)^٢ =$ حلّل باستخدام القاعدة

(ب) $٩س^٢ - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^٢ = (٣س)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٣س)(٢)$ ؟ لا، $٦س \neq ٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعاً كاملاً.

تحقق من فهمك

(أ) $٢٥ + ١١٠ + ٢٢$

(أ) $٩ص^٢ + ٢٤ص + ١٦$

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تاماً إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لا يمكن تحليلها فإنها تكون أولية.

أمثلة	عدد الحدود	الخطوات
$٤ص^٢ + ١٢ص + ٩ = (٢ص + ٣)^٢$	أي عدد	الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق. م. أ.)
$٩س^٢ - ٦س + ٤ = (٣س - ٢)^٢$	٢ أو ٣	الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقاً بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.
$١٢ص^٢ + ٨ص - ٦ = (٣ص + ٢)(٤ص - ٣)$	٣ أو ٤	الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـ $٢ص + ب + س + ج$ أو $٢ص + ب + س + ج$ أو حلّل بتجميع الحدود.

مثال ٢

التحليل التام

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب "أولية":

(أ) $٥س^٢ - ٨٠$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحددين $٥س^٢$ ، -٨٠ هو ٥ ، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقاً بين مربعين.

$$٥س^٢ - ٨٠ = ٥(س^٢ - ١٦) \quad (\text{ق. م. أ. للحددين } ٥)$$

$$٥س^٢ - ٨٠ = ٥(س^٢ - ٤^٢)$$

$$٥س^٢ - ٨٠ = ٥(س^٢ - ٤^٢)$$

$$٥(س - ٤)(س + ٤) =$$

تحليل الفرق بين مربعين

(ب) $٩س^٢ - ٦س - ٣٥$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: $٩س^٢$ ، $-٦س$ ، -٣٥ هو ١ .

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعاً كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعاً كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستخدام النمط $٩س^٢ + ٦س + ٣٥$. هل يوجد عددان ناتج ضربهما $٩(-٣٥)$ ،

أو ٣١٥ ومجموعهما -٦ ؟ نعم، ٢١ و ١٥ ناتج ضربهما -٣١٥ ومجموعهما -٦ .

$$٩س^٢ - ٦س - ٣٥ = ٩س^٢ + ١٥س - ٢١س - ٣٥ \quad \text{استخدم القاعدة}$$

$$٩س^٢ + ١٥س - ٢١س - ٣٥ = ٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥)$$

$$٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥) = (٣س + ٥)(٣س - ٧)$$

$$(٣س + ٥)(٣س - ٧) =$$

حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ.)

عامل مشترك $(٣س + ٥)$

$$(٣س + ٥)(٣س - ٧) =$$

تحقق من فهمك ✓

(ب) $١٢س^٢ + ٥س - ٢٥$

(أ) $٢س^٢ - ٣٢$

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

مثال ٣

حل المعادلة: $٩س^٢ - ٤٨س - ٦٤ = ٠$

المعادلة الأصلية

$$٩س^٢ - ٤٨س - ٦٤ = ٠$$

أضف ٦٤ إلى الطرفين

$$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = ٦٤$$

تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤$ تمثل مربعاً كاملاً

$$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = (٣س - ٨)^٢$$

حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل

$$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = (٣س - ٨)^٢$$

اكتب $(٣س - ٨)$ كحاصل ضرب عاملين

$$(٣س - ٨)(٣س - ٨) = ٠$$



إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك،

يمكنك التحقق من

إجابتك من خلال:

- استعمال طريقة التوزيع

بالترتيب.

- استعمال خاصية التوزيع

- تمثيل كل من العبارة

الأصلية وتحليلها بالرسم

والمقارنة بينهما.

$$\begin{aligned} \bullet &= 8 - 3س \\ \bullet &= 8س \\ \bullet &= 3س \end{aligned}$$

ضع أحد العوامل المتكررة =
أضف ٨ إلى كلا الطرفين
اقسم كلا الطرفين على ٣

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

$$\bullet = \frac{4}{9} + 3س \quad \bullet = 36 + 12س + 2س^2 \quad (3ب) \quad \bullet = 36 + 12س + 2س^2$$

سبق أن حللت معادلات مثل $س^2 - 16 = 0$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضاً استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$$\begin{aligned} \bullet &= 16 - 2س \\ 16 &= 2س \\ 8 \pm &= 2س \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
أضف ١٦ إلى كلا الطرفين
خاصية الجذر التربيعي

تذكر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ ١٦، هما ٤ و -٤. لذا فإن مجموعة الحل هي $\{-4, 4\}$. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ $\{4 \pm\}$.

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ $\pm \sqrt{16}$ موجب أو
سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

أضف إلى

مستوياتك

خاصية الجذر التربيعي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^2 = ن$ ، خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي $ن \geq 0$ ، إذا كان $س^2 = ن$ فإن $س = \pm \sqrt{ن}$.

مثال: $س^2 = 25$

$$س = \pm \sqrt{25} = 5 \pm$$

إذا كانت $ن$ في المعادلة $س^2 = ن$ ، ليست مربعاً كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت $ن$ مربعاً كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال ٤

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$(أ) \quad 81 = 2(6 - 3س)$$

$$81 = 2(6 - 3س)$$

$$81 \pm = 6 - 3س$$

$$9 \pm = 6 - 3س$$

$$9 \pm 6 = 3س$$

$$9 + 6 = 3س \quad \text{أو} \quad 9 - 6 = 3س$$

$$15 = 3س \quad \text{أو} \quad 3 = 3س$$

الجذران هما ١٥ و -٣

المعادلة الأصلية

خاصية الجذر التربيعي

$$9 \times 9 = 81$$

أضف ٦ إلى كلا الطرفين

افصل المعادلة إلى معادلتين

بسّط

تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

$$(ب) \quad ١٢ = ٢(٦ + س)$$

المعادلة الأصلية

$$١٢ = ٢(٦ + س)$$

خاصية الجذر التربيعي

$$\sqrt{١٢} \pm = ٦ + س$$

اطرح ٦ من كلا الطرفين

$$\sqrt{١٢} \pm ٦ - = س$$

الجذران هما $\sqrt{١٢} + ٦ -$ ، $\sqrt{١٢} - ٦ -$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $\sqrt{١٢} + ٦ - \approx ٢,٥٤$ ، $\sqrt{١٢} - ٦ - \approx ٩,٤٦$

تحقق من فهمك

$$(ب٤) \quad ٢٦ = ٢(٣ + ع)$$

$$(أ٤) \quad ١٢١ = ٢(١٠ - أ)$$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المعادلة

فيزياء: أسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $٥ - ن^٢ + ع = ٠$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي (ع) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، $ع = ٠$ والارتفاع الابتدائي ٦٨، إذن $٦٨ = ٥ - ن^٢ + ع$.

المعادلة الأصلية

$$ع = ٥ - ن^٢ + ع$$

عوض عن ع بـ صفر، وعن ع بـ ٦٨

$$٦٨ = ٥ - ن^٢ + ٦٨$$

اطرح ٦٨ من كلا الطرفين

$$٠ = ٥ - ن^٢$$

اقسم على -٥

$$٠ = ١٣,٦ - ن^٢$$

خاصية الجذر التربيعي

$$\pm ٣,٧ \approx ن$$

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تحقق من فهمك

(٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.



تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي

(١٥٦٤م-١٦٤٢م)

كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتل تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتل من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.



وزارة التعليم

الدرس ٦-٧: المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

2025 - 1447

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

$$(1) \quad 25س^2 + 60س + 36 \quad (2) \quad 6س^2 + 30س + 36$$

مثال ٢ حلّل كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(3) \quad 2س^2 - س - 28 \quad (4) \quad 4س^2 + 64 \quad (5) \quad 4س^2 + 9س - 16$$

المثالان ٣، ٤ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(6) \quad 36 = 2س^2 \quad (7) \quad 64ص^2 - 48ص + 18 = 9 \quad (8) \quad 47 = 2(5 + ع)$$

مثال ٥ (٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢ م. استعمل المعادلة $ع = 5 - ن^2$ لإيجاد العدد التقريبي للشواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

$$(10) \quad 4س^2 - 42س + 110 \quad (11) \quad 16س^2 - 56س + 49 \quad (12) \quad 81س^2 - 90س + 25$$

مثال ٢ حلّل كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(13) \quad 24د^2 + 39د - 18 \quad (14) \quad 8س^2 + 10س - 21$$

$$(15) \quad 2ب^2 + 12ب - 24 \quad (16) \quad 16أ^2 - 121ب^2$$

$$(17) \quad 12م^3 - 22م^2 - 70م \quad (18) \quad 8ج^2 - 88ج + 242$$

$$(19) \quad 4و - 2 \quad (20) \quad 12ل^3 - 3ل$$

$$(21) \quad 16ك^3 - 48ك^2 + 36ك \quad (22) \quad 4ن^3 + 10ن^2 - 8ن$$

$$(23) \quad 2أ^2ب - 2أ^2 - 2أب^3 + 2أب \quad (24) \quad 2ر^3 - 72ر + 36$$

$$(25) \quad 3ك^3 - 24ك^2 + 48ك \quad (26) \quad 2ج^2 + 2ج - 3هـ + 4هـ$$

$$(27) \quad 8ص^2 - 200ع^2$$

المثالان ٣، ٤ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(28) \quad 4م^2 - 24م + 36 = 0 \quad (29) \quad 7 = 2(ع - 4)$$

$$(30) \quad 4 = 2أ + \frac{10}{ص} + \frac{25}{49} \quad (31) \quad 0 = 2س^2 - \frac{3}{2}س + \frac{9}{16}$$

$$(32) \quad 25 = 8س + 16 \quad (33) \quad 180 = 60س^2 - 60س$$

$$(34) \quad 4س^2 = 80س - 400 \quad (35) \quad 9 - 54س = 81س^2$$

$$(36) \quad 15 = 4ج^2 + 4ج + 1$$



مثال ٥ (٣٧) **فيزياء:** أسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩ م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قرب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

(٣٨) **هندسة:** مُثلت مساحة مربع بالعبارة $٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.

(٣٩) **هندسة:** إذا كانت العبارة $٨ص^٣ + ٤٠ص^٢ + ٥٠ص$ تمثل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّ منصور وفيصل العبارة $س^٨ - س^٤$ تحليلًا تامًا، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

فيصل

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٢ + ١)(س - ١)(س + ١)$$

منصور

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٢ + ١)(س - ١)$$

(٤١) **تحّد:** حلّ $س^٦ + س^٢ + س^٠$ تحليلًا تامًا.

(٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًا، ثم حلّ المعادلة.

(٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

(٤٤) **اكتب:** فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلًا تامًا.

(٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

$$٨١ + ٣٦س + ٤س^٢$$

$$٢٥س^٢ + ١٠س + ١$$

$$٤س^٢ + ١٠س + ٤$$

$$١٦س^٢ - ٢٤س + ١٦$$

(٤٦) **اكتب:** فسّر كيف تحدد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً.

تدريب على اختبار

(٤٨) **هندسة:** إذا كان محيط دائرة $\frac{٦٠\pi}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟

(أ) $\frac{٣٠\pi}{٥}$ وحدة مربعة

(ب) $\frac{١٢\pi}{٥}$ وحدة مربعة

(ج) $\frac{٩\pi}{٢٥}$ وحدة مربعة

(د) $\frac{٣٠\pi}{٢٥}$ وحدة مربعة

(٤٧) حلّ المعادلة $٢(٣ - س) = ٢٥$.

(ج) ١٤، ٤

(أ) ٢، ٨

(د) ١٤، ٤ -

(ب) ٨، ٢ -



مراجعة تراكمية

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٥)

$$(٤٩) \quad ٤س٢ - ٨١ص٢ \quad (٥٠) \quad ١ - ١٠٠ل٢ \quad (٥١) \quad ٢٠ - ٢٣س٢ \quad (٥٢) \quad ١ - ٢٥ن٢$$

حلّ كلاً من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٤)

$$(٥٣) \quad ٥س٢ - ٤٨س + ٩٠ = ٠ \quad (٥٤) \quad ٢٨ = ١٤س٢ + ١٤س \quad (٥٥) \quad ٤٨ = ١٠س٢ - ٢س$$

(٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٥)، (٢، -٣). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط في كل ممّا يأتي:

$$(٥٧) \quad (١، ٢)، (٣، ٥)$$

$$(٥٨) \quad (١، ٥)، (٤، ٥)$$

$$(٥٩) \quad (٣، ٢)، (٣، ٨)$$



حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تاماً:

(١) $٢٥س^٢ص^٤$ (٢) $١٧ب^٢$

(٣) $١٨ج-٣د^٥$

(٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النباتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نباتات.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

(٥) $٢٤د$ ، $١٦أ^٣$ ، $٢٨أ^٢$ ، $٧ج$ ، $٢٤د$

(٧) $٥٠ج^٢هـ$ ، $١٢٠ج-هـ$ (٨) $٨ك^٢ر$ ، $٣٦ك$

(٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $٢س^٢ - ١٥س - ١٥$ وحدة مربعة، فما عرضه؟



(أ) $٥ - س$ (ج) $٣ - س$

(ب) $٣ + س$ (د) $٢ - س$

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٠) $٥س - ١٠س$

(١١) $٧أب + ١٤ب^٢ + ٢١أ^٢ب$

حلّل كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٢) $٤س^٢ + ٨س + ٢$

(١٣) $١٠أ^٢ - ٥٠أ - ٥$

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

(١٤) $ص(ص - ١٤) = ٠$

(١٥) $٣س(س + ٦) = ٠$

(١٦) $١١٢ = ٢أ$

(١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفة مساحتها

(س - ٢) متر مربع بالسجاد، إذا كان عرض الغرفة

(س - ٣) متراً، فما طولها بالأمتار؟

(أ) $٣ - س$ (ج) $٣ + س$

(ب) $٩ - س$ (د) ٣

حلّل كلّاً من ثلاثيات الحدود الآتية:

(١٨) $٦ + ٧س + ٢س^٢$ (١٩) $٢٨ - ٣س - ٢س^٢$

(٢٠) $١٠س - ٢س - ٣$ (٢١) $١٥س + ٧س - ٢$

(٢٢) $٢٥ - ٢س$ (٢٣) $٨١ - ٢س$

(٢٤) $٩س - ٢س - ١٢س + ٤$ (٢٥) $٢٥ + ٤٠س + ٢س^٢$

حلّل كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٢٦) $٢١ = ٢س - ٤س$ (٢٧) $٢٤ - ٢س - ٢س = ٠$

(٢٨) $٦س - ٢س - ٥س - ٦ = ٠$ (٢٩) $٢س - ١٣س + ٢٠ = ٠$

(٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدّ عاملاً من عوامل

$١ - ٤س$ عند تحليلها تحليلاً تاماً؟

(أ) $١ - ٢س$ (ج) $س$

(ب) $١ - س$ (د) ١



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) جهَّز زياد الأعداد المدوَّنة في الجدول لكل نوعٍ من أنواع الكعك، إذا أراد وضع العدد نفسه من كل نوعٍ من الكعك في كل سلةٍ، بحيث تحوي السلة أكبر عددٍ ممكن من كل نوع من أنواع الكعك جميعها، فما عدد السلال اللّازمة؟
"تلميح: لا يشترط استخدام جميع قطع الكعك".

نوع الكعك	العدد
بالشوكولاتة	٥٤
بالفراولة	٤٥
بالفواكة	٣٦
بالكراميل	٦٠

- (أ) ١٨ (ب) ١٦
(ج) ١٢ (د) ١٠

٢) باستعمال المعلومات في السؤال ١، كم قطعة كعكٍ من كل نوعٍ ستحوي كل سلةٍ؟

- (أ) ٢ (ب) ٣
(ج) ٤ (د) ٦

٣) حلّل: $م + ن - ٥ = ٣ - ن - ١٥$

- (أ) $(٣ - ن)(٥)$ (ب) $(٣ - ن)(٥ + م)$
(ج) $(٥ - م)(٣ + ن)$ (د) $(٣ - م)(٥ + ن)$

٤) أي ممَّا يأتي يمثل حلًّا للمعادلة: $٦ + ٢س - ١١٢ = ٠$ ؟

- (أ) ١٤ (ب) ٨
(ج) ٦ (د) ١٢

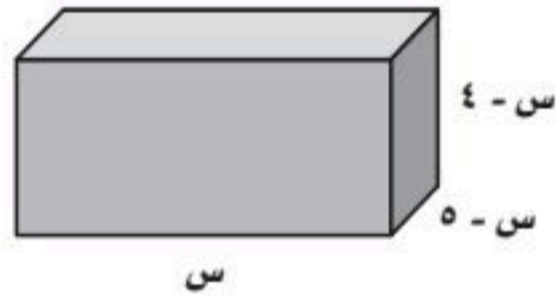
٥) أي من كثيرات الحدود الآتية، كثيرة حدود أولية؟

- (أ) $٥س + ٢س٣ + ٢٤$
(ب) $٤س + ٢س٢ + ١٠$
(ج) $٤س + ٢س٣ + ٧٠$
(د) $٥س + ٢س٣ + ٤$

٦) أي ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $٤٥س٢ - ٨٠س$ ؟

- (أ) ٥ (ب) $٣س - ٤س$
(ج) $٢س - ٥س$ (د) $٣س + ٤س$

٧) إذا كان حجم متوازي المستطيلات أدناه يساوي ٥٦س، ستمتراً مكعباً،



فأي من الأعداد التالية، لا يمثل بُعداً لمتوازي المستطيلات؟

- (أ) ٦سم (ب) ٧سم
(ج) ٨سم (د) ١٢سم

٨) عند تحليل كثيرة الحدود: $٩ص - ٢ص + ٢٠$ ، نحصل على:

- (أ) $(٢ - ص)(١٠ - ص)$
(ب) $(٤ - ص)(٥ - ص)$
(ج) $(٢ - ص)(٧ - ص)$
(د) $(٥ - ص)(٢ + ص)$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٤: يمكن التحقق من الحل بتعويض العدد في المعادلة؛ للحصول على جملة رياضية صحيحة.

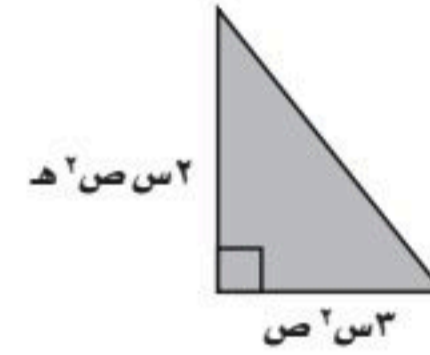


إجابات قصيرة

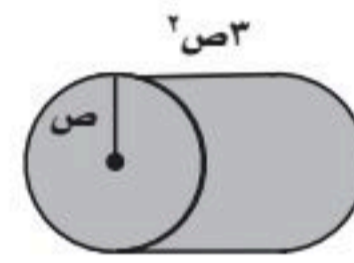
أجب عن الأسئلة الآتية:

عبر عن كلِّ ممَّا يأتي في صورة وحيدة حدِّ.

(٩) مساحة المثلث:



(١٠) حجم الأسطوانة:



بسِّط كلِّ عبارة ممَّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$(١١) \frac{m^3 n^2}{m n}$$

$$(١٢) \left(\frac{3^3 - 2^3}{2s} \right)$$

$$(١٣) \left(\frac{9s^2 - 5s^3}{2s^2} \right)$$

(١٤) المعادلة: $-16n^2 + 40n + 3 = 0$ تمثل ارتفاع بالون فوق سطح الأرض بالقدم بعد n ثانية من إطلاقه، أوجد ارتفاعه بعد ثابنتين من إطلاقه.

إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

(١٥) المعادلة: $-16n^2 + 200n = 0$ تمثل ارتفاع كرة تمَّ ركلها من الأرض لأعلى.

(أ) عبِّر عن الارتفاع بصورة كثيرة حدودٍ بعد تحليلها تحليلًا تامًّا.

(ب) في أي وقت يكون ارتفاع الكرة عن الأرض مساويًا للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى يكون ذلك؟

أدرب



من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزِّز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

أنا طالبٌ معدٌّ للحياة، ومنافسٌ عالمياً.

وزارة التعليم

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..

١٥

١٤

١٣

١٢

١١

١٠

٩

٨

٧

٦

٥

٤

٣

٢

١

مهارة
سابقة

٢-٦

٢-٦

٢-٦

١-٦

١-٦

٣-٧

٦-٧

٥-٧

٤-٧

٣-٧

٢-٧

١-٧

١-٧

الفصل ٨

الدوال التربيعية

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل للعوامل واستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

■ أحل المعادلات التربيعية بيانياً، وباكمال المربع، و باستعمال القانون العام.

لماذا؟

🌐 **تكاليف:** تقدر التكلفة الكلية "ت" للإنتاج اليومي لمنتج ما في منشأة صناعية بالدالة:
ت(س) = $800 - 10س + \frac{1}{4}س^2$ حيث س عدد الوحدات المنتجة يومياً، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً لإيجاد عدد الوحدات المنتجة في اليوم الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن.

المفردات:

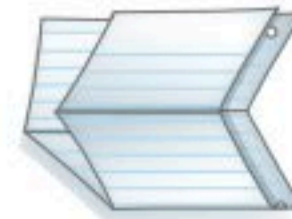
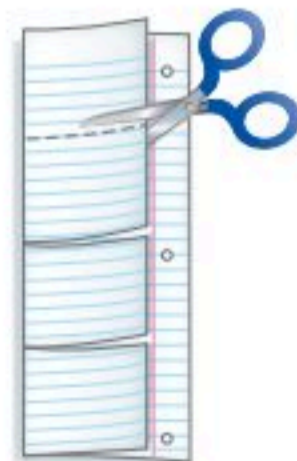
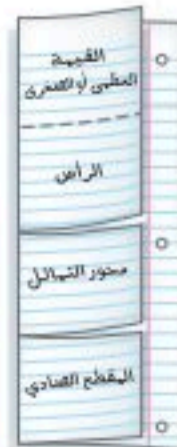
- الدالة التربيعية ص (١٠٨)
- الجذر المكرر ص (١١٨)
- إكمال المربع ص (١٢٤)
- القانون العام ص (١٣٠)



المطويات منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التمثيل البياني للدوال التربيعية، مبتدئاً بورقة ملاحظات.

- ١ اطو الورقة طولياً بحيث يتكوّن هامش خارجي دليلاً على المطوية.
- ٢ اطو الورقة مرتين عرضياً لتكوين أربعة أقسام.
- ٣ افتح الطية وقص على خطوط الطي العرضية.
- ٤ سمّ كل قسم كما في الشكل أدناه.





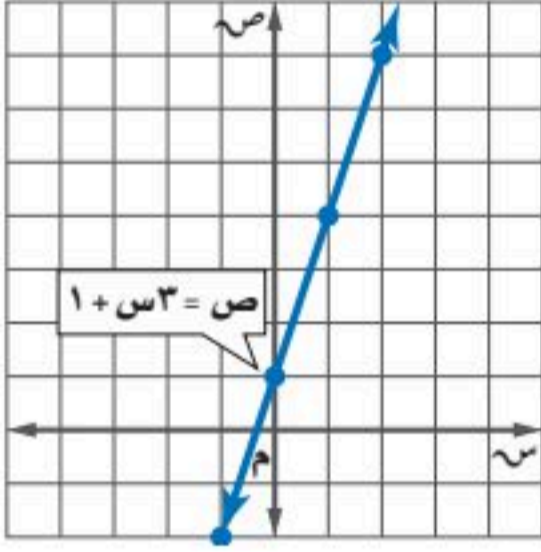
التهيئة للفصل ٨

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س + ١$ بيانياً.



ص	$ص = ٣س + ١$	س
٢-	$١ + (١-)٣$	١-
١	$١ + (٠)٣$	٠
٤	$١ + (١)٣$	١
٧	$١ + (٢)٣$	٢

اختبار سريع

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً: (مهارة سابقة)

$$(١) \quad ٣ + س = ص$$

$$(٢) \quad ٢ + س٢ = ص$$

$$(٣) \quad ٣ - س٢ = ص$$

$$(٤) \quad ١ - س٠,٥ = ص$$

$$(٥) \quad ١٢ = ص٣ - س٤$$

$$(٦) \quad ٩ + ٦ = ص٣$$

$$(٧) \quad ١ = ص - س$$

$$(٨) \quad ٦ = ص٣$$

(٩) **توفير:** مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعياً، مثل بيانياً معادلة تبين المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعاً.

مثال ٢

حدّد إذا كانت ثلاثية الحدود $س٢ - ١٠س + ٢٥$ تشكل مربعاً كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

(١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم

(٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم

(٣) هل الحد الأوسط يساوي $٢(١س)(٥)$ ؟ نعم

$$س٢ - ١٠س + ٢٥ = (س - ٥)٢$$

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعاً كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

(مهارة سابقة)

$$(١٠) \quad ٣٦ + ١٢س + ٢س٢$$

$$(١١) \quad ٢٥ + ٥س + ٢س٢$$

$$(١٢) \quad ١٠٠ + ٢٠س + ٢س٢$$

$$(١٣) \quad ٣٢ + ١٢س + ٢س٢$$

$$(١٤) \quad ٦٤ + ١٦س + ٢س٢$$

$$(١٥) \quad ٤٩ + ٢٨س + ٢س٢$$

$$(١٦) \quad ٢٥ + ١٢س + ٢س٢$$

$$(١٧) \quad ١٢١ + ٢٢س + ٢س٢$$

$$(١٨) \quad ١ + ٢س + ٢س٢$$



تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ مترًا، وتقدم عرضًا رائعًا لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانياً.

والآن

- أحلّ التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
- أمثل الدوال التربيعية بيانياً.

المضردات

الدالة غير الخطية

الدالة التربيعية

الصورة القياسية للدالة التربيعية

القطع المكافئ

محور التماثل

الرأس

القيمة الصغرى

القيمة العظمى

متماثل

خصائص الدوال التربيعية: درست سابقاً الدوال الخطية، وهناك أيضًا دوال غير خطية تختلف

أشكال تمثيلاتها البيانية. **الدوال التربيعية** مثلًا هي دوال غير خطية، ويمكن كتابتها على الصورة $D(s) = As^2 + Bs + C$ ، حيث $A \neq 0$ ، وتُسمى هذه الصورة **بالصورة القياسية** للدالة التربيعية، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**. وتتماثل القطوع المكافئة حول خط يتوسطها يُسمى **محور التماثل**، يقطع القطع في نقطة واحدة تُسمى **الرأس**.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

الدالة المولدة (الأم): $D(s) = As^2 + Bs + C$

الصورة القياسية: $D(s) = As^2 + Bs + C$

شكل التمثيل: قطع مكافئ

محور التماثل: $s = -\frac{B}{2A}$

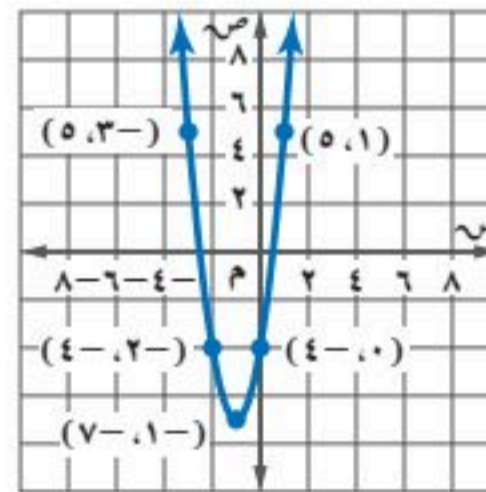
المقطع الصادي: جـ

ويكون التمثيل البياني للدالة $D(s) = As^2 + Bs + C$ مفتوحًا إلى أعلى، إذا كان $A < 0$ ، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحًا إلى أسفل، إذا كان $A > 0$ ، وتمثل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

مثال ١ التمثيل البياني للقطع المكافئ

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $D(s) = 3s^2 + 2s - 4$ بيانياً، وحدد مجالها ومداه.

مثل الأزواج المرتبة بيانياً، ثم صل بينها بمنحنى. يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداه هو $\{s \mid s \leq -7\}$ ؛ لأن -7 هي القيمة الصغرى.



ص	س
١	٥
٠	٤-
١-	٧-
٢-	٤-
٣-	٥

تحقق من فهمك

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $D(s) = 3s^2 + 2s - 4$ بيانياً، وحدد مجالها ومداه.

مراجعة المضردات

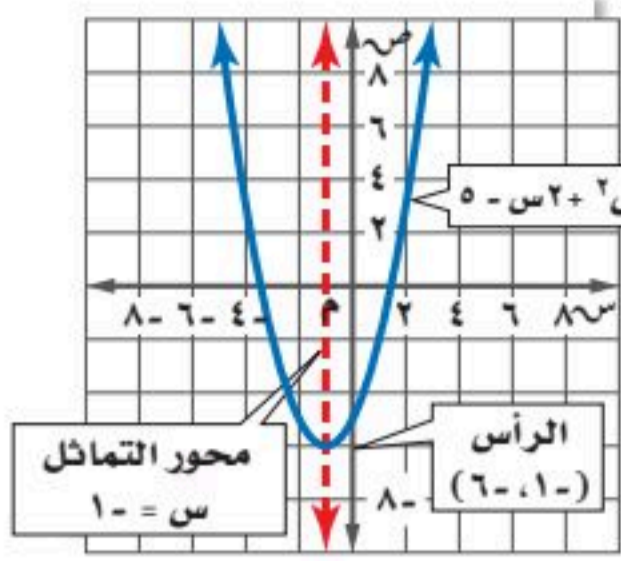
المجال والمدى

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير المستقل s . وأما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع s .



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447



الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

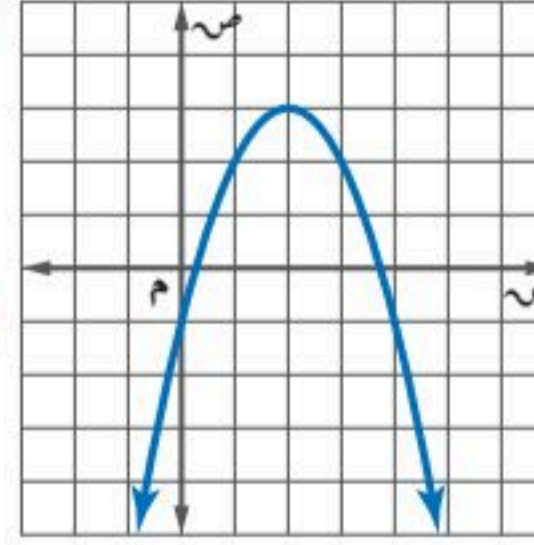
ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولاً عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع.

مثال ٢ تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:

الخطوة ١: أوجد الرأس.

بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل فالرأس يمثل النقطة العظمى له وهي (٣، ٢).



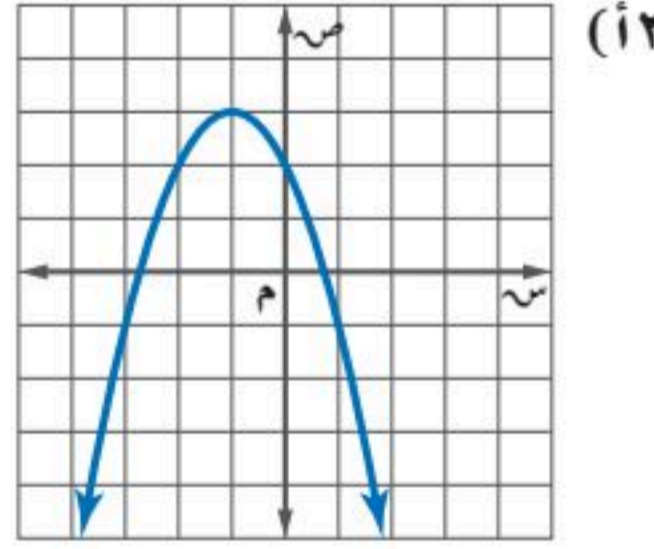
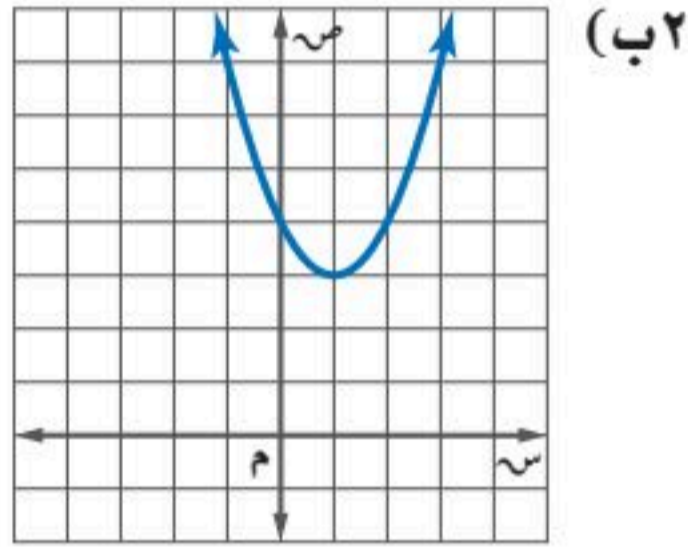
الخطوة ٢: أوجد محور التماثل.

بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يمر بالرأس، ويقسم القطع إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي $س = ٢$.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

بما أن المقطع الصادي هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور الصادات، وهي النقطة (٠، -١)؛ لذا يكون المقطع الصادي هو -١.

تحقق من فهمك ✓



عند تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة الدالة يكون من الأسهل غالباً إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: $ص = ٢س² + ٤س - ٣$

صيغة معادلة محور التماثل

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$

$$أ = ٢، ب = ٤، بسط$$

$$س = -\frac{٤}{٢ \times ٢} = -١$$

معادلة محور التماثل هي $س = -١$.

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثياً سينياً لرأس القطع المكافئ، ثم عوضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي الصادي.

المعادلة الأصلية

$$ص = ٢س² + ٤س - ٣$$

بسط، $س = -١$

$$٥ = ٢(-١)² + ٤(-١) - ٣$$

الرأس هو (-١، ٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، ٣) دائماً؛ لذا فالمقطع

الصادي هو -٣.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

المقطع الصادي هو

الحد الثابت (ج) للدالة

التربيعية في الصورة

القياسية



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

الدرس ٨-١ : تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

تحقق من فهمك

$$(أ) \text{ ص } = 3س - 2س + 6س - 5 \quad (ب) \text{ ص } = 2س^2 + 2س + 2$$

هناك فروق عامة بين الدوال الخطية والدوال التربيعية تظهر في الجدول الآتي:

الدوال التربيعية	الدوال الخطية	الصورة القياسية
$ص = أس^2 + ب س + ج ; أ \neq 0$	$ص = أس + ب$	
٢، لاحظ أن المتغير المستقل $س$ في الحد الأول هو من الدرجة الثانية، ومعامله $أ$ لا يمكن أن يساوي صفرًا، وإلا أصبحت الدالة خطية.	١، لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.	الدرجة
$ص = 3س^2 + 5س - 4$	$ص = 2س + 6$	مثال
قطع مكافئ	خط مستقيم	التمثيل البياني

كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الأعلى أم إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثل له نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

مفهوم أساسي

القيم العظمى والقيم الصغرى

اضف الى

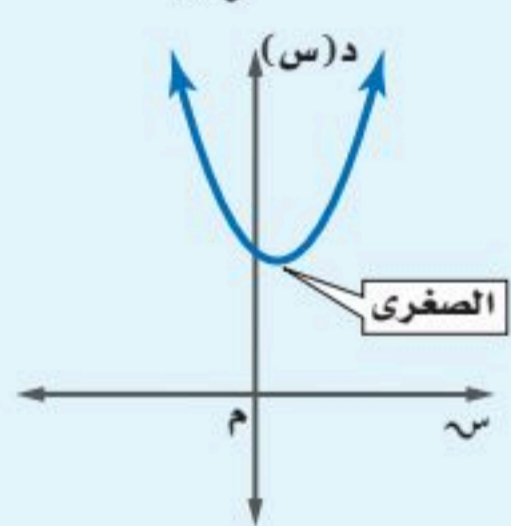
مطوياتك

التعبير اللفظي: يكون التمثيل البياني للدالة: $د(س) = أس^2 + ب س + ج$ ، حيث $أ \neq 0$:

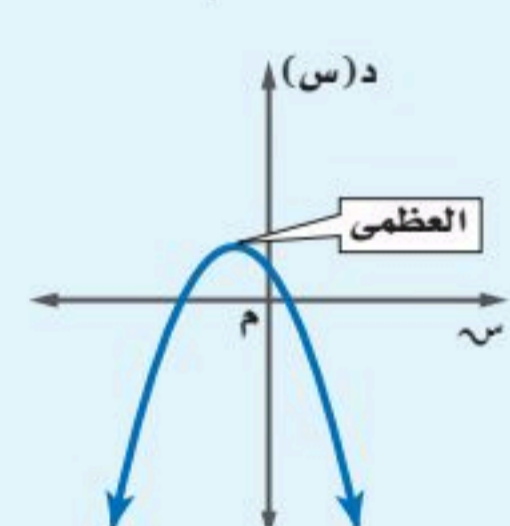
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما $أ < 0$
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما $أ > 0$
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت $أ < 0$ ، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت $أ > 0$.

مثال:

أ موجبة



أ سالبة



مثال ٤ القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن $د(س) = 2س^2 - 4س + 6$.

(أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة $د(س) = 2س^2 - 4س + 6$ ، $أ = 2$ ، $ب = -4$ ، $ج = 6$.

بما أن $أ$ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

$$\text{الإحداثي السيني للرأس} = \frac{-ب}{2أ} = \frac{-(-4)}{2(2)} = 1$$

$$د(س) = 2س^2 - 4س + 6$$

$$د(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 6 = 4 - 4 + 6 = 2$$

$$د(1) = 2$$

إذن، القيمة العظمى تساوي ٢

تنبيه !

القيم الصغرى والقيم

العظمى

لا تنس إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس $(س، ص)$ ، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثل الإحداثي الصادي له.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

ج) حدد مجال الدالة ومدaha.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى، أي $\{ص | ص \geq ٨\}$.

تحقق من فهمك

ليكن د (س) = $٢س٢ - ٤س - ١$.

٤أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

٤ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٤ج) حدد مجال الدالة ومدaha.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً: تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

أضف إلى

مطويتك

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مفهوم أساسي

- الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.
- الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.
- الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.
- الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.
- الخطوة ٥: صل بين النقاط بمنحنى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال ٥

مثّل الدالة د (س) = $٢س٢ + ٤س + ٣$ بيانياً.

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

$$\begin{aligned} \text{صيغة معادلة محور التماثل} \\ \text{ب} - \text{أ} \\ \text{س} &= \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \\ \text{س} &= \frac{-٤}{١ \times ٢} \\ \text{س} &= -٢ \end{aligned}$$

$$\text{أ} = ١, \text{ب} = ٤$$

بسّط

الخطوة ٢: أوجد الرأس، وحدّد فيما إذا كان يمثل نقطة صغرى أم عظمى.

$$\text{ص} = \text{س}٢ + ٤\text{س} + ٣$$

$$\text{ص} = \text{س}٢ + ٤(٢-) + ٣$$

$$\text{س} = -٢$$

بسّط

$$\text{ص} = ١$$

يقع الرأس عند النقطة $(٢-, ١-)$ ، وبما أن أ موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحاً إلى أعلى؛ لذا يمثل الرأس قيمة صغرى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

$$\text{ص} = \text{س}٢ + ٤\text{س} + ٣$$

$$\text{ص} = ٠$$

بسّط

$$\text{ص} = ٣$$

المقطع الصادي يساوي ٣.

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

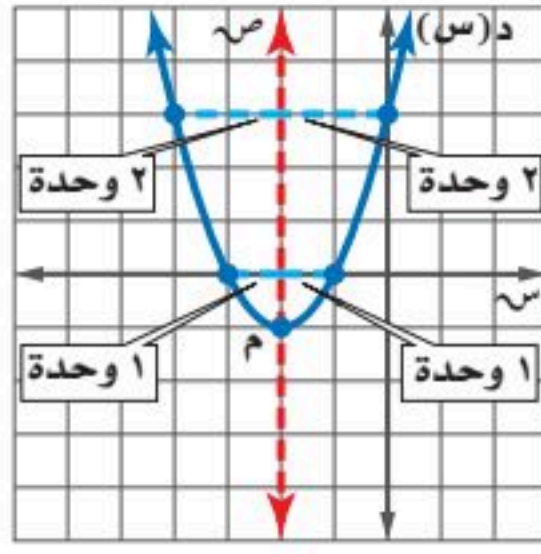
النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يميناً ويساراً، كما تبعد بعداً متساوياً من الرأس.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

الدرس ٨-١: تمثيل الدوال التربيعية بيانياً



الخطوة ٤ : يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الذي يمثل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي الصادي نفسه

الخطوة ٥ : صل بين النقاط بمنحنى.

تحقق من فهمك

$$(أ) د(س) = ٢س^٢ + ٢س - ١ \quad (ب) د(س) = ٣س^٢ - ٦س + ٢$$

استعملت معلوماتك حول الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتماثل لإنشاء تمثيلات بيانية، ويمكنك تحليل هذه التمثيلات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٦ من واقع الحياة استعمال تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

فيزياء : عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلماً لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة $f(s) = -١٣س^٢ + ١٣٠س + ٣١٢$.

(أ) مثل الدالة بيانياً.

$$ص = -\frac{١٣}{٢}س^٢ + ١٣٠س + ٣١٢$$

معادلة محور التماثل

$$ص = -\frac{١٣٠}{٢(-١٣)}س + \frac{١٣٠^٢}{٢(-١٣)} + ٣١٢$$

أ = -١٣، ب = ١٣٠

بما أن معادلة محور التماثل $ص = ٥$ ؛ لذا فالإحداثي السيني للرأس هو ٥.

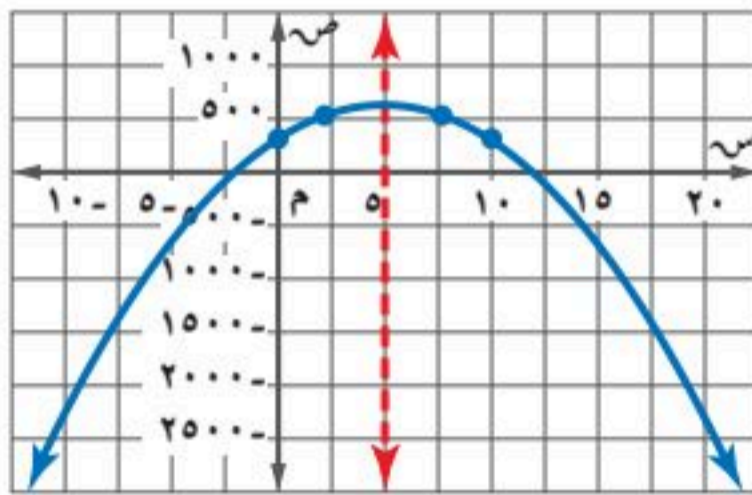
$$ص = -١٣س^٢ + ١٣٠س + ٣١٢$$

المعادلة الأصلية

$$ص = -١٣(٥)^٢ + ١٣٠(٥) + ٣١٢$$

$$ص = -٣٢٥ + ٦٥٠ + ٣١٢ = ٦٣٧$$

الرأس هو (٥، ٦٣٧).



ولتجد نقطة أخرى، اختر $س = ٠$ وعود ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (٣١٢، ٠)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (٣١٢، ١٠).

كرّر هذه العملية واختر $س = ٢$ لتحصل على النقطة (٥٢٠، ٢)، وتكون النقطة المقابلة لها (٥٢٠، ٨)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى.

(ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الصاروخ؟

أطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفراً، أو عند المقطع الصادي للدالة، أي من على ارتفاع ٣١٢ قدماً عن الأرض.

(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس؛ لذا يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له ٦٣٧ قدماً بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.



الربط مع الحياة

أنشئت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية في جامعة الملك خالد عام ١٤٢٢هـ؛ لتهيئة سبل التواصل بين المهتمين بمجالات العلوم الفيزيائية المختلفة، من خلال عقد وتنظيم الندوات والمؤتمرات في مجال العلوم الفيزيائية.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تحقق من فهمك

٦) رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة $ص = -١٦س + ٦٤س + ٦$.

(أ) مثل مسار هذا الرمح بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الرمح؟

(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

تأكد

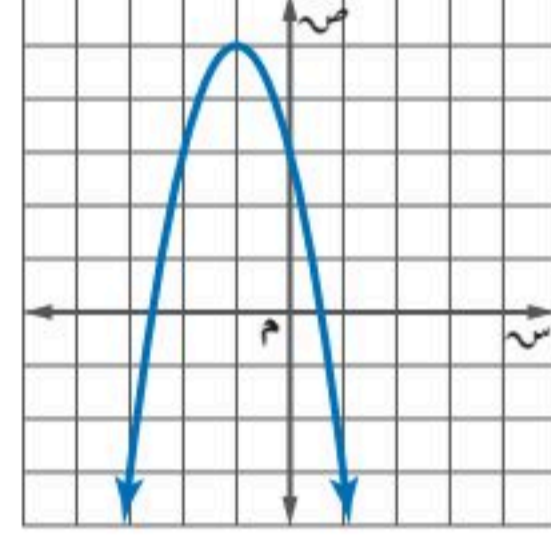
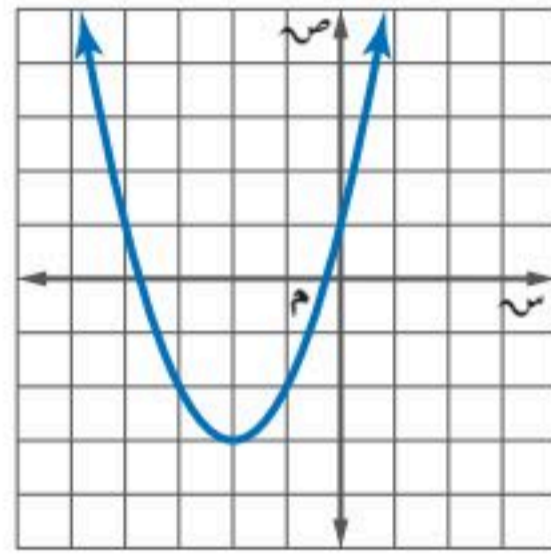
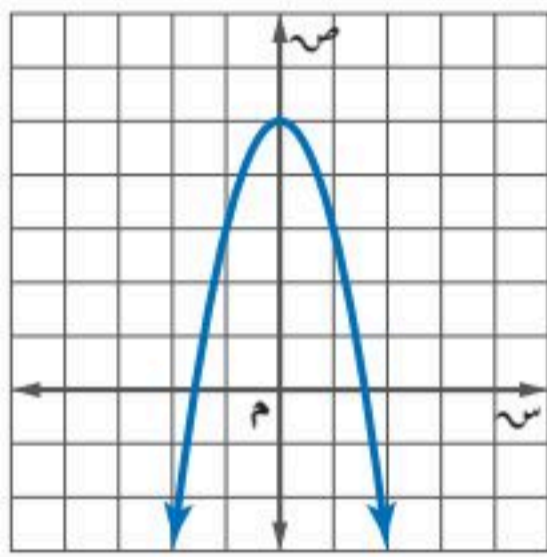
استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداهما:

مثال ١

(١) $ص = ٢س + ٤س - ٦$ (٢) $ص = ٢س + ٢س - ١$ (٣) $ص = ٣س - ٢س - ٦س - ٥$

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

مثال ٢



أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

مثال ٣

(٧) $ص = -٢س + ٢س + ١$ (٨) $ص = ٢س - ٤س + ٥$ (٩) $ص = ٤س - ٢س + ٨س + ٩$

في الأسئلة ١٠-١٢ أجب عما يأتي:

مثال ٤

(أ) حدد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدد مجال الدالة ومداهما.

(١٠) $ص = -٢س + ٢س + ٢$ (١١) $ص = -٣س + ٢س + ٦س + ٣$ (١٢) $ص = -٢س + ٢س + ٨س - ٦$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً:

مثال ٥

(١٣) د(س) = $-٣س + ٢س + ٦س + ٣$ (١٤) د(س) = $-٢س + ٢س + ٤س + ١$ (١٥) د(س) = $-٢س + ٢س + ٨س - ٤$

٦) مثال ٦) كرة: يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة $ص = -١٦س + ١٦س + ٥$ حيث تمثل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

(أ) مثل هذه الدالة بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي قُذفت منه الكرة؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟



وزارة التعليم

الدرس ٨-١: تمثيل الدوال التربيعية بيانياً
2025 - 1447

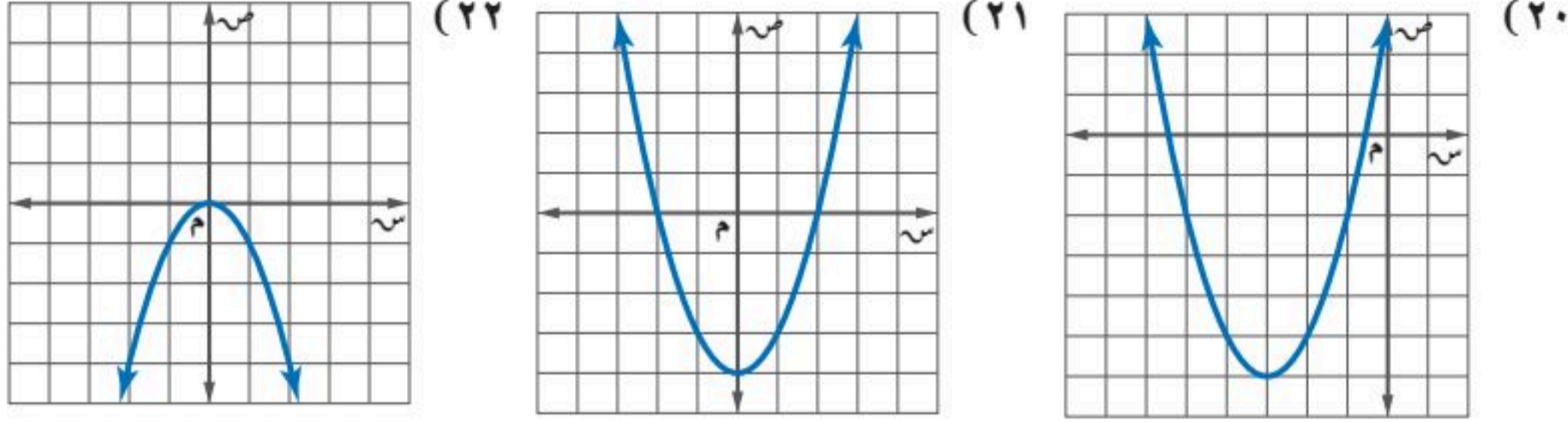
مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداهها.

(١٧) $ص = ٢س + ٤س + ٦$ (١٨) $ص = ٢س + ٤س + ٧$ (١٩) $ص = ٢س - ٨س - ٥$

مثال ٢

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:



مثال ٣

تقنية: أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يلي، ومثلها بيانيًا باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

(٢٣) $ص = ٢س + ٨س + ١٠$ (٢٤) $ص = ٢س + ١٢س + ١٠$ (٢٥) $ص = -٣س - ٦س + ٧$

مثال ٤

في الأسئلة ٢٦-٢٨، أجب عما يأتي:

(أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدّد مجال الدالة ومداهما؟

(٢٦) $ص = -٢س + ٨س + ١$ (٢٧) $ص = ٢س + ٤س - ٥$ (٢٨) $ص = ٣س + ١٨س - ٢١$

مثال ٥

مثل كل دالة فيما يأتي بيانيًا:

(٢٩) $ص = -٣س + ٦س - ٤$ (٣٠) $ص = -٢س - ٤س - ٣$ (٣١) $ص = ٣س - ١٢س + ٥$

(٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدمًا في الثانية، والدالة $ع = -١٦ن + ٩٠$ تمثل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

(أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

(ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدمًا؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟



الربط مع الحياة

عندما ينطلق الجسم أو الأداة في الهواء يسمى مقذوفًا، وقد يكون هذا الجسم أداة جامدة مثل الرمح، قرص، كرة، ... أو كائن حي مثل الوثب العالي، والوثب الطويل.



(٣٣) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

(أ) جبرياً: حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله.

الأصفار	الدالة المرتبطة	المعادلة
		$س^2 - س = ١٢$
		$س^2 + ٨س = ٩$
		$س^2 = ١٤س - ٢٤$
		$س^2 + ١٦س = ٢٨$

(ب) بيانياً: مثل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية.

(ج) تحليلياً: استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول أعلاه.

(د) لفظياً: وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟

ارشادات للدراسة

الأصفار

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة مع احتساب الجذر المكرر.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٤) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $س = -\frac{٣}{٨}$ ، ملخصاً خطوات عملك.

(٣٥) اكتشف الخطأ: تحاول عيبر ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

عيبر

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$ص = \frac{ب}{١٢}$$

$$ص = \frac{٤ - (١ - ٢)}{٢}$$

$$ص = ٢$$

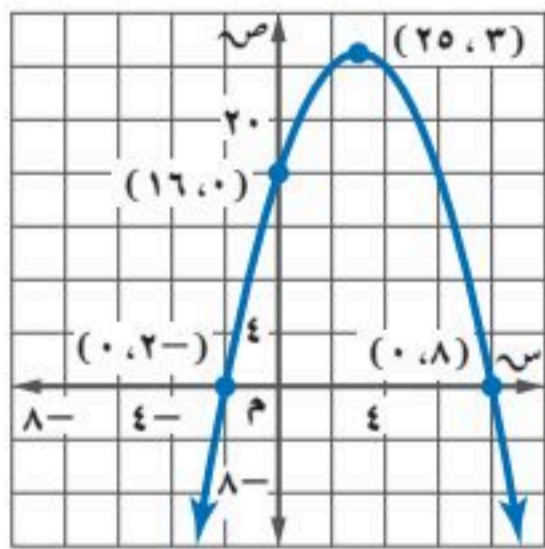
منى

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$ص = \frac{ب}{١٢}$$

$$ص = \frac{٤}{(١ - ٢)}$$

$$ص = ٢$$



(٣٦) تحدّد: اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين.

(٣٧) تبرير: إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٠، ٢)، وإحدى نقاطه (٩، ٥)، فأوجد نقطة أخرى عليه، واطرح طريقة إيجادها.

(٣٨) اكتب: وضح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسّر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصلت إليها.



وزارة التعليم

الدرس ٨-١: تمثيل الدوال التربيعية بيانياً
2025 - 1447

تدريب على اختبار

- (٤٠) ما مدى الدالة د (س) = $4 - 2س - \frac{1}{3}$ ؟
- (أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{1}{3}$
- (ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة
- (ج) جميع الأعداد الحقيقية
- (د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي $-\frac{1}{3}$



(٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟

- (أ) ٧٢ ط وحدة مربعة (ج) ١٢٩٦ ط وحدة مربعة
- (ب) ١٤٤ ط وحدة مربعة (د) ٩ ط وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (مهارة سابقة)

(٤٣) $١٦ + ٨س + ٢س٩$

(٤٢) $٢٥ + ٢س٢٠ - ٤س$

(٤١) $١ + ٤س + ٢س٤$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي:

(٤٦) $١٨ - ٣س - ص$

(٤٥) $١٢ = ٣ص - ٢س$

(٤٤) $١٠ = ٢ص + س$





١-٨ معدل التغير في الدالة التربيعية

أطلق نموذج صاروخ من الأرض إلى الأعلى بسرعة ١٤٤ قدمًا/ثانية، والدالة $v = -16s + 144$ تمثل ارتفاع الصاروخ (ص) بعد (س) ثانية، يمكنك استقصاء معدل التغير في ارتفاع الصاروخ باستعمال الدالة التربيعية.

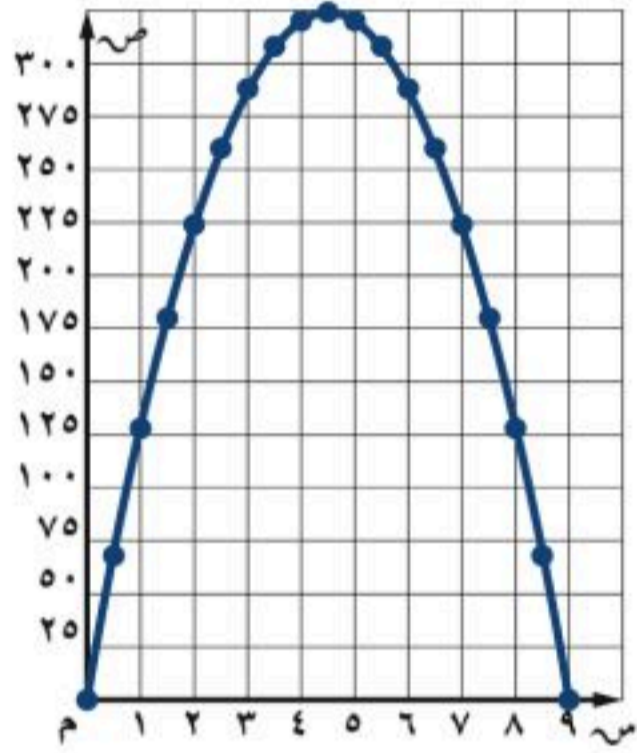


نشاط

الخطوة ١: انسخ الجدول أدناه.

س	٠	٠,٥	١,٠	١,٥	...	٩,٠
ص	٠					
معدل التغير	—					

الخطوة ٢: أوجد قيمة ص عند كل قيمة من قيم س من ٠ إلى ٩.



الخطوة ٣: مثل الأزواج المرتبة (س، ص) على ورقة مربعات، ثم صل بين النقاط بمنحنى، ولاحظ أن الدالة تتزايد عندما $s > 0$ ، $s > 4,5$ ، وتتناقص عندما $s > 4,5$ ، $s > 9$.

الخطوة ٤: تذكر أن معدل التغير هو التغير في ص مقسومًا على التغير في س، أوجد معدل التغير عند كل فترة طولها نصف ثانية.

تمارين

استعمل الدالة التربيعية $v = -16s + 144$

(١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهًا للجدول الوارد في النشاط مستعملًا قيم س: -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

(٢) مثل بيانيًا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصل بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.

(٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءًا من $s = -3$ ، وقارن بين معدلات التغير عندما تتزايد الدالة، وعندما تتناقص.

(٤) **تحذير:** إذا أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة $d = -16s + 100$ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كما في الجدول الوارد في تمرين ١، واختر قيمًا مناسبة لـ (س)، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنماط التي تلاحظها.



حل المعادلات التربيعية بيانياً

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



يعبر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكلت داخل ملعب بالدالة $ص = -س^2 + ١٨س$ ؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن

- أحل المعادلات التربيعية بيانياً.
- أقدر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

المفردات

الجذر المكرر

حل المعادلة التربيعية بالتمثيل البياني: الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي:

$أس^2 + ب س + ج = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ ، ولكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة، استبدل ص أو د (س) بصفر، وتذكر أن حلول المعادلة أو جذورها يمكن تحديدها بإيجاد المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة، ويوجد للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان أو حل حقيقي واحد، أو لا يوجد لها حلول حقيقية.

أضف إلى مطويتك

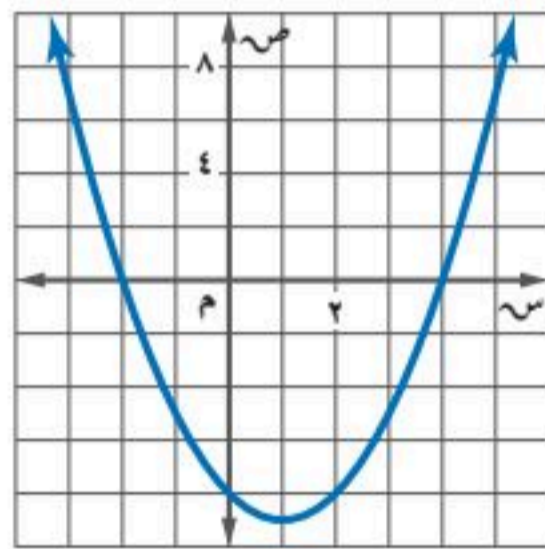
لا يوجد حلول حقيقية

مفهوم أساسي

حلول المعادلات التربيعية

حل حقيقي وحيد

حلان حقيقيان مختلفان



مثال ١ جذران حقيقيان مختلفان

حل المعادلة $س^2 - ٢س - ٨ = ٠$ بيانياً.

مثل الدالة د (س) = $س^2 - ٢س - ٨$ المرتبطة بالمعادلة بيانياً.

تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند -٢ ، ٤ ؛ لذا فالحلول هي -٢ ، ٤ .

تحقق: تحقق من صحة كل حل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$٠ = ٨ - ٢س - ٢س^2$$

المعادلة الأصلية

$$٠ = ٨ - ٢س - ٢س^2$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ٨ - (٤)٢ - ٢(٤)$$

$$٤ = ٢س \text{ أو } ٤ = ٢س^2$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ٨ - (٢-)٢ - ٢(٢-)$$

$$٠ = ٠$$

بسط.

$$٠ = ٠$$

تحقق من فهمك

$$٠ = ٣ + ٤س - ٢س^2 \text{ (ب)}$$

$$٠ = ١٨ + ٣س - ٢س^2 \text{ (أ)}$$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

حلول المعادلة في مثال ١ عدداً حقيقيين مختلفان، إلا أنه أحياناً يكون الجذران هما العدد نفسه، ويسمى عندها **جذراً مكرراً**.

مثال ٢ جذر مكرر

حل المعادلة $s^2 - 6s - 9 = 0$ بيانياً.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$s^2 - 6s - 9 = 0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$s^2 - 6s + 9 = 0 \quad \text{أضف ٩ إلى كلا الطرفين.}$$

الخطوة ٢: مثل الدالة المرتبطة $D(s) = s^2 - 6s + 9$

الخطوة ٣: حدّد المقطع السيني للتمثيل البياني، ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو المقطع السيني الوحيد للدالة؛ لذا فإن للمعادلة

$$3 \quad \text{حلاً وحيداً هو}$$

تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل

$$s^2 - 6s + 9 = 0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$0 = (s - 3)(s - 3) \quad \text{حلّ إلى العوامل}$$

$$0 = s - 3 \quad \text{أو} \quad 0 = s - 3 \quad \text{خاصية الضرب الصفري}$$

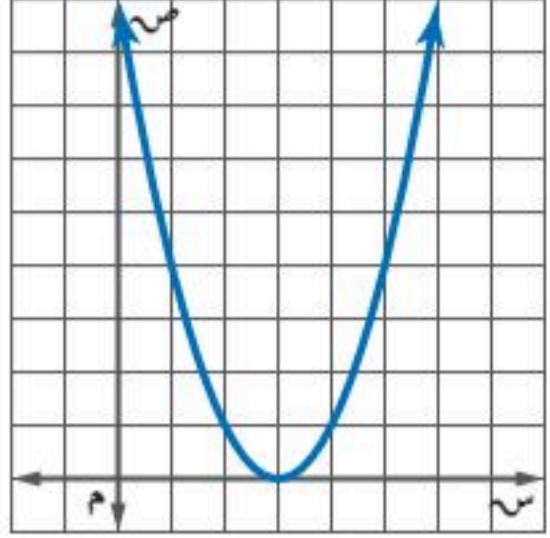
$$s = 3 \quad \text{أو} \quad s = 3 \quad \text{أضف ٣ إلى كلا الطرفين}$$

الحل الوحيد هو ٣

تحقق من فهمك

$$(ب٢) \quad s^2 - 8s - 16 = 0$$

$$(أ٢) \quad s^2 + 25 = 10s$$



تنبيه !

الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

كما أن هناك معادلات تربيعية ليس لها حلول حقيقية.

مثال ٣ لا يوجد جذور حقيقية

حل المعادلة $s^2 - 3s + 5 = 0$ بيانياً.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية.

الخطوة ٢: مثل الدالة المرتبطة $D(s) = s^2 - 3s + 5$

الخطوة ٣: حدّد المقطع السيني للتمثيل البياني للدالة. لاحظ أن

التمثيل البياني ليس له مقطع سيني؛ لذا فليس للمعادلة

جذور حقيقية، وبالتالي فإن مجموعة الحل هي \emptyset .

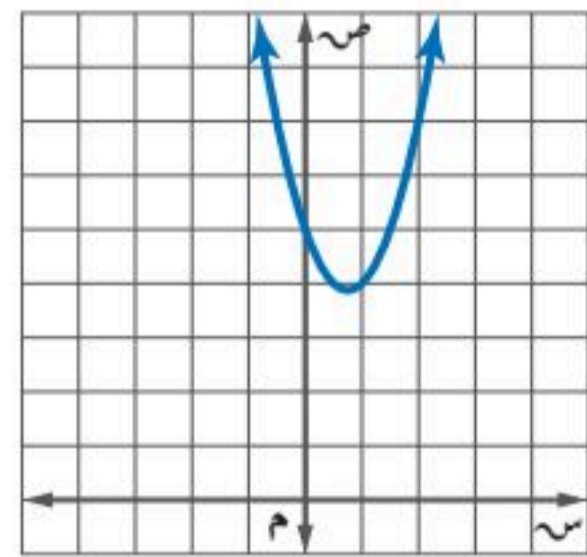
تحقق: حلّ المعادلة بالتحليل إلى العوامل.

لا يوجد عوامل للعدد ١٠ مجموعها -٣، لذا فالعبارة غير قابلة للتحليل إلى العوامل، أي أنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

$$(ب٣) \quad s^2 - 2s - 8 = 6s$$

$$(أ٣) \quad s^2 - 3s = 5$$



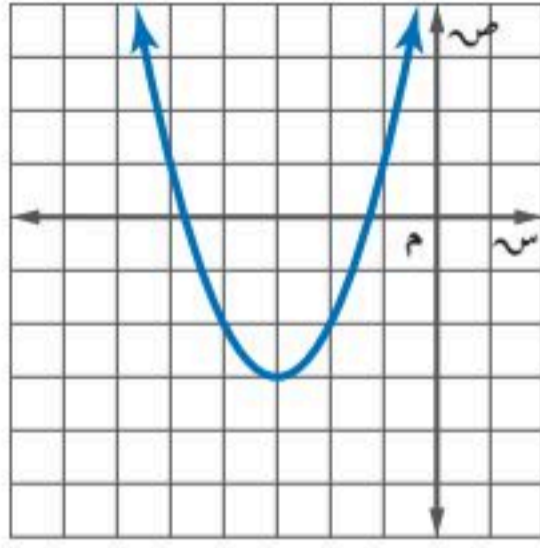
وزارة التعليم

الدرس ٨-٢: حل المعادلات التربيعية بيانياً

2025 - 1447

تقدير الحلول: تمثل الجذور التي وجدت للمعادلات السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

مثال ٤ تقدير الجذور باستعمال الجدول



حلّ المعادلة $س^2 + ٦س + ٦ = ٠$ بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة.

مثل الدالة المرتبطة $د(س) = س^2 + ٦س + ٦$ بيانيًا.

يقع المقطعان السينيان بين -٥ ، -٤ ، وبين -٢ ، -١ .

أنشئ جدولاً بتدرّيج طوله ١٠، لقيم $س$ التي تقع بين -٥ ، -٤ ، وبين -٢ ، -١ . وابحث عن التغير في إشارات قيم الدالة، وتعد قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

٤,١-	٤,٢-	٤,٣-	٤,٤-	٤,٥-	٤,٦-	٤,٧-	٤,٨-	٤,٩-	س
١,٧٩-	١,٥٦-	١,٣١-	١,٠٤-	٠,٧٥-	٠,٤٤-	٠,١١-	٠,٢٤	٠,٦١	ص
١,١-	١,٢-	١,٣-	١,٤-	١,٥-	١,٦-	١,٧-	١,٨-	١,٩-	س
٠,٦١	٠,٢٤	٠,١١-	٠,٤٤-	٠,٧٥-	١,٠٤-	١,٣١-	١,٥٦-	١,٧٩-	ص

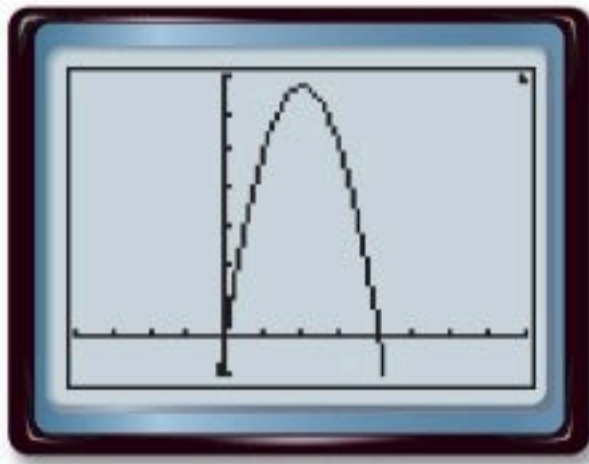
بما أن قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة في كلا الجدولين هي -١١ ، ٠ ؛ لذا فإن الجذرين التقريبيين هما: -٧ ، -٣ .

تحقق من فهمك

(٤) حلّ المعادلة $س^2 + ٦س - ٣ = ٠$ بيانيًا. وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة.

يُعدّ تقريب الجذور للدوال التربيعية مفيدًا في تطبيقات من واقع الحياة.

مثال ٥ من واقع الحياة تقدير الجذور باستعمال الحاسبة البيانية



ركل سعد الكرة بقدمه من ارتفاع قدم واحدة من الأرض إلى أعلى بسرعة ٦٥ قدمًا/ثانية، وتمثل الدالة $ع = -١٦س^2 + ٦٥س + ١$ ارتفاع الكرة (ع) بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟

لإيجاد جذور المعادلة $-١٦س^2 + ٦٥س + ١ = ٠$ ، استعمل الحاسبة البيانية في تمثيل الدالة المرتبطة $د(ن) = -١٦س^2 + ٦٥س + ١$.

بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٤ تقريبًا؛ لذا فإن الكرة بقيت ٤ ثوانٍ تقريبًا في الهواء.

تحقق من فهمك

(٥) إذا ركل سعد الكرة من ارتفاع قدمين من الأرض إلى أعلى بسرعة ٥٥ قدمًا/ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



الأمثلة ١ - ٣

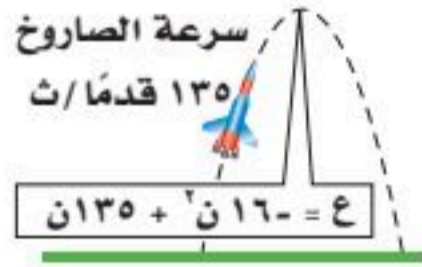
تقنية: حل كل معادلة فيما يلي بيانياً باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

$$(١) \text{ س}^٢ + ٣\text{ س} - ١٠ = ٠ \quad (٢) \text{ س}^٢ - ٨\text{ س} = ٠ \quad (٣) \text{ س}^٢ + ٤\text{ س} - ٤ = ٠$$

مثال ٤ حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة، فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(٤) \text{ س}^٢ - ٥\text{ س} + ١ = ٠ \quad (٥) \text{ س}^٢ = ٩ - ٠ \quad (٦) \text{ س}^٢ = ٢٥$$

مثال ٥



(٧) **معرض العلوم:** إذا صمّم نواف نموذجاً لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبينة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريباً؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانياً:

$$(٨) \text{ س}^٢ + ٧\text{ س} + ١٤ = ٠ \quad (٩) \text{ س}^٢ + ٢\text{ س} - ٢٤ = ٠ \quad (١٠) \text{ س}^٢ = ٢ - ١$$

مثال ٤ حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة، فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(١١) \text{ س}^٢ + ٢\text{ س} - ٩ = ٠ \quad (١٢) \text{ س}^٢ - ٤\text{ س} = ٢٠ \quad (١٣) \text{ س}^٢ + ٣\text{ س} = ١٨$$

مثال ٥

(١٤) **أفعوانية:** ترتفع أفعوانية براكيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة: $ع = ١٦ - ن + ١٨٥ ن$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدّد أصفار كل منها:

$$(١٥) \text{ ص} = \text{س}^٢ - ٨\text{ س} + ١٦ \quad (١٦) \text{ ص} = \text{س}^٢ + ٣\text{ س} + ٤ \quad (١٧) \text{ ص} = \text{س}^٢ + ١٢\text{ س} + ٣٢$$

(١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠.

(١٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

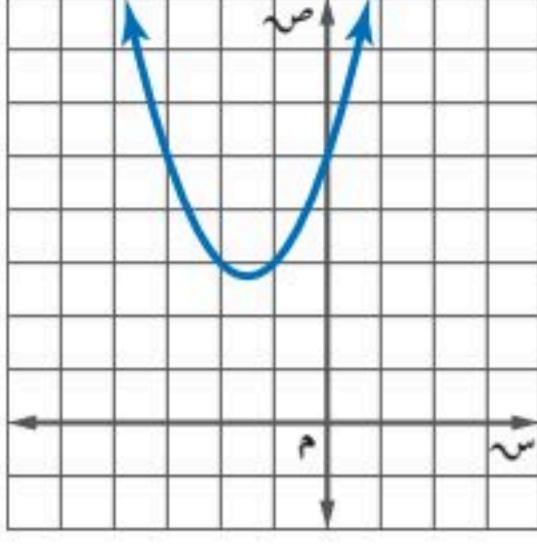
(أ) بيانياً: مثلّ الدالة $\text{ص} = \text{س}^٢$.

(ب) تحليلياً: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

(ج) بيانياً: مثلّ الدوال $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٢$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٤$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٦$ بيانياً على المستوى الإحداثي السابق نفسه.

(د) تحليلياً: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها الإحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟

مسائل مهارات التفكير العليا



(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

(٢١) **مسألة مفتوحة:** صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدد الفترة الزمنية التي يمكنها الجسم في الهواء.

(٢٢) **تحذّر:** اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

(أ) جذر مكرر مرة واحدة.

(ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد.

(ج) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعياً.

(٢٣) **اكتب:** وضح كيف تقرب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعداداً صحيحة.

تدريب على اختبار

(٢٥) تمثل الصيغة $f = \frac{1}{4}n^2$ المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطاً حرّاً بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير ج، الذي يمثل تسارع الجاذبية.

$$\begin{aligned} \text{(أ)} \quad ج &= \frac{1}{4}n^2 - ف \\ \text{(ب)} \quad ج &= 2 - ف \\ \text{(ج)} \quad ج &= ف - \frac{1}{4}n^2 \\ \text{(د)} \quad ج &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

(٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟

$$\text{(أ)} \quad 62,5\% \quad \text{(ج)} \quad 1,6\%$$

$$\text{(ب)} \quad 6,25\% \quad \text{(د)} \quad 0,16\%$$

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيّن إذا كان الرأس يمثل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثل الدالة بيانياً: (الدرس ٨-١)

$$\begin{aligned} \text{(٢٦)} \quad ص &= ٣س٢ & \text{(٢٧)} \quad ص &= ٣س٢ - ٦س - ٨ & \text{(٢٨)} \quad ص &= ٤س٢ - ٨س + ٥ & \text{(٢٩)} \quad ص &= ٣س٢ + ٢س + ١ \end{aligned}$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

$$\begin{aligned} \text{(٣٠)} \quad ٣٢ &= ٢س٢ & \text{(٣١)} \quad ٢٥ &= (٤ - س)٢ & \text{(٣٢)} \quad ٣٢ &= ٤س٢ - ٤س + ١ & \text{(٣٣)} \quad ٣٢ &= ٢س٢ + ١٦س - ٣٢ \end{aligned}$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حدّد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعاً كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّها:

$$\text{(٣٦)} \quad ٣٦ + س٢ - ٦٠س$$

$$\text{(٣٥)} \quad ١ + س٢ + ٦س$$

$$\text{(٣٤)} \quad ٩ + س٢ - ٢٤س$$

$$\text{(٣٩)} \quad ٩ + س٢ - ٣س$$

$$\text{(٣٨)} \quad ٤٩ + س٢ - ٨٤س$$

$$\text{(٣٧)} \quad ٨١ + س٢ - ٨س$$





استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها: (الدرس ١-٨)

$$(١) \text{ ص} = \text{س}^٢ + \text{س}^٣ + ١$$

$$(٢) \text{ ص} = \text{س}^٢ - \text{س}^٤ + ٣$$

$$(٣) \text{ ص} = -\text{س}^٢ - \text{س}^٣ - ٣$$

$$(٤) \text{ ص} = -\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ١$$

إذا كانت: $\text{ص} = \text{س}^٢ - \text{س}^٥ + ٤$ (الدرس ١-٨)

(٥) اكتب معادلة محور التماثل.

(٦) أوجد الرأس، وحدد ما إذا كان يمثل نقطة صغيرة أو عظمى.

(٧) مثل الدالة بيانياً.

(٨) **كرة:** تم ركل كرة من على سطح الأرض بسرعة ٩٠ قدماً/ثانية، إذا كانت المعادلة: $\text{ع} = -١٦\text{ن}^٢ + ٩٠\text{ن}$ ، تعبر عن ارتفاع الكرة بعد ن ثانية من إطلاقها. (الدرس ١-٨)

(أ) أوجد ارتفاع الكرة بعد ثانية من إطلاقها.

(ب) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

(ج) متى يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساوياً للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(٩) **اختيار من متعدد:** التمثيل البياني للدالة:

$$\text{ص} = \text{س}^٢ - \text{س}^٣ + ١ \quad (\text{الدرس ١-٨})$$

(أ) مفتوح إلى أعلى وله قيمة عظمى.

(ب) مفتوح إلى أعلى وله قيمة صغيرة.

(ج) مفتوح إلى أسفل وله قيمة عظمى.

(د) مفتوح إلى أسفل وله قيمة صغيرة.

حل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس ٢-٨)

$$(١٠) \text{س}^٢ + \text{س}^٥ + ٦ = ٠$$

$$(١١) \text{س}^٢ + ٨ = -٦\text{س}$$

$$(١٢) -\text{س}^٢ + \text{س}^٣ + ١ = ٠$$

$$(١٣) \text{س}^٢ = ١٢$$

(١٤) **كرة البيسبول:** المعادلة: $\text{ع} = -١٦\text{ن}^٢ + ١٢٠\text{ن}$ ، تمثل ارتفاع كرة البيسبول بعد ن ثانية من ضربها، أوجد الوقت الذي تبقى فيه الكرة في الهواء. (الدرس ٢-٨)

استعمل التحليل إلى عوامل؛ لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدّد أصفار كل منها: (الدرس ٢-٨)

$$(١٥) \text{ص} = \text{س}^٢ - \text{س}^٣ + ٢$$

$$(١٦) \text{ص} = \text{س}^٢$$

$$(١٧) \text{ص} = \text{س}^٢ + \text{س}^٤ + ٤$$

$$(١٨) \text{ص} = \text{س}^٢ + \text{س} + ٣$$



حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

يسدّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: $ع = ٩ - س + ١٨ + ٢$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة؛ فمثلاً لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: $٤ = ٩ - س + ١٨ + ٢$ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

المفردات

إكمال المربع

إكمال المربع: درست في الدرس ٦-٧ حل معادلات تربيعية بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف منها، والتي تستعمل فقط إذا كان المقدار الواقع على الطرف الأيمن مربعاً كاملاً، أما في العبارات ثلاثية الحدود التربيعية التي تمثل مربعات كاملة والتي يكون معاملها الرئيس ١، فهناك علاقة بين معامل الحد الذي يحتوي س والحد الثابت.

$$٢(٥ + س) = ٢س + ٢(٥) + ٢٥$$

$$= ٢س + ١٠ + ٢٥$$

لاحظ أن $٢٥ = ٢ \left(\frac{١٠}{٢} \right)$ ، ويمكن الحصول على الحد الثابت، بقسمة معامل الحد الذي يحتوي س على ٢، وتربيع الناتج، يمكن استعمال هذه الفكرة في تحويل أي عبارة تربيعية على الصورة

$س + ب + ٢$ إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى **إكمال المربع**.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

إكمال المربع

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س + ب + ٢$ ، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب (معامل س)

الخطوة ٢: ربّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س + ب + ٢$ ، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل.

$$س + ب + ٢ = \left(\frac{ب}{٢} + س \right)^٢$$

الرموز:

مثال ١ إكمال المربع

أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود: $س + ٤ + ٢$ مربعاً كاملاً.

الطريقة ١: استعمال بطاقات الجبر.



إذن ج = ٤



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

الطريقة ٢: استعمال خوارزمية إكمال المربع.

- الخطوة ١:** أوجد $\frac{1}{4}$ العدد ٤. $2 = \frac{4}{4}$
- الخطوة ٢:** رتب الناتج من الخطوة ١. $4 = 2 \times 2$
- الخطوة ٣:** أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $s^2 + 4s$.
إذن، $4 = 4$ ، لاحظ أن $s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2$.

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $s^2 - 8s + ٨$ جـ مربعاً كاملاً.

حل المعادلات بإكمال المربع: يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فصل الحدين s^2 ، ب s أولاً.

مثال ٢ حل معادلة بإكمال المربع

حُلِّ المعادلة: $s^2 - 6s + 12 = 19$ بإكمال المربع.

المعادلة الأصلية	$s^2 - 6s + 12 = 19$
اطرح ١٢ من كلا الطرفين	$s^2 - 6s = 7$
بما أن $(\frac{6}{2})^2 = 9$ ؛ لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين	$s^2 - 6s + 9 = 7 + 9$
حلل $s^2 - 6s + 9$	$(s - 3)^2 = 16$
أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$s - 3 = \pm 4$
أضف ٣ إلى كل طرف	$s = 3 \pm 4$
افصل الحدين	$s = 3 + 4$ أو $s = 3 - 4$
بسّط	$s = 7$ أو $s = -1$

إذن الحلان هما ٧، -١.

تحقق من فهمك

(٢) حل المعادلة: $s^2 - 12s + 3 = 8$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية معاملها الرئيس لا يساوي ١، اقسّم كل حد على هذا المعامل، ثم افصل الحدين اللذين يحتويان s^2 ، s ثم أكمل المربع.

مثال ٣ معادلة فيها $a \neq 1$

حل المعادلة: $2s^2 - 8s + 18 = 0$ بإكمال المربع.

	$2s^2 - 8s + 18 = 0$
اقسم كلا الطرفين على ٢-	$\frac{2s^2 - 8s + 18}{2} = \frac{0}{2}$
بسّط	$s^2 - 4s + 9 = 0$
اطرح ٩ من كلا الطرفين	$s^2 - 4s = -9$
بما أن $(\frac{4}{2})^2 = 4$ ؛ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين	$s^2 - 4s + 4 = -9 + 4$
حلل $s^2 - 4s + 4$	$(s - 2)^2 = -5$

لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة؛ لذا فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

(٣) حُلِّ المعادلة: $3s^2 - 9s - 3 = 21$ بإكمال المربع.

تنبيه

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي ١ قبل إجراء عملية إكمال المربع.



مثال ٤ من واقع الحياة حل مسألة بإكمال المربع

زِي رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زيّ خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: $ك = ٢س٠ + ٨س٤ + ٣٥٠$ ، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالاً؟

المبلغ الكلي ٨٦٠ ريالاً؛ لذا اجعل المعادلة تساوي ٨٦٠، ثم أكمل المربع.

المعادلة الأصلية

$$٨٦٠ = ٣٥٠ + ٨س٤ + ٢س٠$$

اقسم كل طرف على ٢،

$$\frac{٨٦٠}{٢} = \frac{٣٥٠ + ٨س٤ + ٢س٠}{٢}$$

بسّط

$$٤٣٠ = ١٧٥ + ٤س٤ + س٠$$

اطرح ١٧٥ من كلا الطرفين

$$١٧٥ - ٤٣٠ = ١٧٥ - ١٧٥ + ٤س٤ + س٠$$

بسّط

$$٢٥٥ = ٤س٤ + س٠$$

بما أن $(\frac{٢٤}{٤})^٢ = ١٤٤$ ؛ لذا أضف ١٤٤ إلى كلا الطرفين

$$١٤٤ + ٢٥٥ = ١٤٤ + ٤س٤ + س٠$$

بسّط

$$٢٦٩٤ = ٤س٤ + س٠$$

حلّل $٤س٤ + س٠ + ١٤٤$ إلى العوامل

$$٢٦٩٤ = (س٠ + ١٢)٢$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\sqrt{٢٦٩٤} \pm = ١٢ + س٠$$

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

$$\sqrt{٢٦٩٤} \pm ١٢ - = س٠$$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمتي س٠.

افصل الحلين

$$س٠ = \sqrt{٢٦٩٤} - ١٢ \quad \text{أو} \quad س٠ = \sqrt{٢٦٩٤} + ١٢$$

أوجد القيم التقريبية

$$٦٣,٩ \approx$$

$$٣٩,٩ \approx$$

بما أنه لا يمكن أن نشترى عددًا سالبًا من القطع فالحل السالب غير معقول، إذن يمكن شراء ٣٩ قطعة من هذا الزي.

تحقق من فهمك

(٤) إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالاً، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟

تأكد

مثال ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملاً:

(٢) $٢٢س٠ + ٢س٠ + جـ$

(١) $١٨س٠ - ٢س٠ + جـ$

(٤) $٧س٠ - ٢س٠ + جـ$

(٣) $٩س٠ + ٢س٠ + جـ$

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

(٦) $٨س٠ - ٢س٠ = ٩$

(٥) $٤س٠ + ٢س٠ = ٦$

(٨) $٢س٠ + ١٠س٠ + ٢٢ = ٤$

(٧) $٩س٠ + ٢س٠ - ١ = ٠$

المثالان ٢، ٣

مثال ٤

(٩) **إنشاءات:** يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ مترًا مربعًا، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعد الصالة؟



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

مثال ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً:

(١٠) $س^٢ + ٢٦س + جـ$ (١١) $س^٢ - ٢٤س + جـ$ (١٢) $س^٢ - ١٩س + جـ$

(١٣) $س^٢ - ٢٢س + جـ$ (١٤) $س^٢ - ١٥س + جـ$ (١٥) $س^٢ - ١٣س + جـ$

المثالان ٢، ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

(١٦) $س^٢ + ٦س - ١٦ = ٠$ (١٧) $س^٢ - ٢س - ١٤ = ٠$

(١٨) $س^٢ - ٨س - ١ = ٨$ (١٩) $س^٢ + ٣س + ٢ = ٢٢$

(٢٠) $س^٢ - ٢س + ٧ = ٥$ (٢١) $س^٣ + ١٢س + ٨١ = ١٥$

مثال ٤

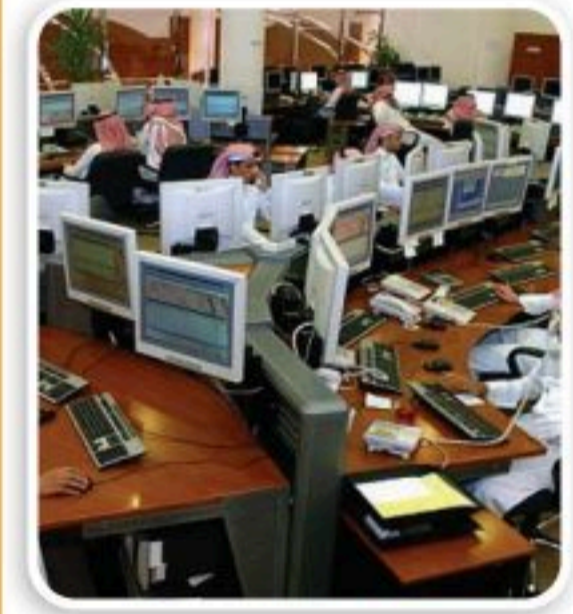
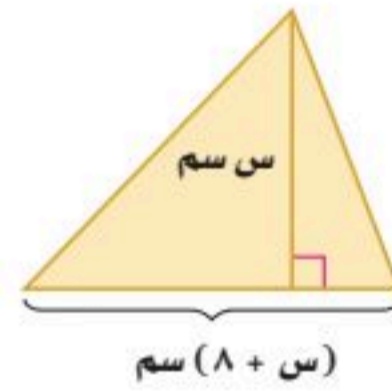
(٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية $س = ٥ - ٣س + ٠,٥س^٢$ ، حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالاً؟

(٢٣) **هندسة:** أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً: (م: المساحة)

(٢٤) $م = ١١٠ سم^٢$



(٢٣) $م = ٤٥ سم^٢$

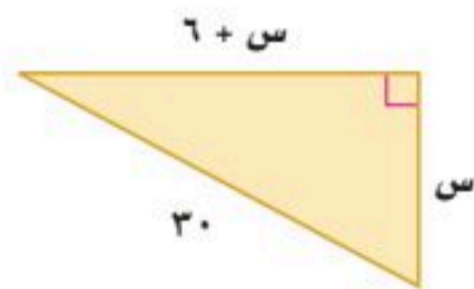


الربط مع الحياة

البضاعة التي ليس لها أصول حقيقية، بل أوراق أو أصول مالية تكون غالباً أسهماً وسندات، ويتم تداولها في سوق يُسمى سوق الأسهم، ولهذا السوق قواعد قانونية وفنية تحكم أداءه.

(٢٥) **نظرية الأعداد:** عددان صحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟

(٢٦) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث المجاور.



(٢٧) **علم الفلك:** يُعبّر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة $ل = \frac{١}{٢}س^٢ + ل$ ، حيث (ل) الارتفاع الابتدائي، (ج) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية على سطح كوكب المريخ

$٣,٣٧ م/ث^٢$ ، وعلى سطح الأرض $٩,٨ م/ث^٢$ ، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠ متراً فوق سطح كل من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

(أ) أي الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أولاً؟

(ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟

(٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^٢ + جـس + ٢٢٥$ مربعاً كاملاً.



(٢٩) **رسم:** إذا كان لدى أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بُعدي الإطار على أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة. فما بُعد الإطار الجديد؟

(٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

(أ) **جدولياً:** انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني.

عدد الجذور	ب ^٢ - ٤أج	ثلاثية الحدود
١	٠	س ^٢ - ٨س + ١٦
		س ^٢ - ١١س + ٣
		س ^٢ + ٦س + ٩
		س ^٢ - ٢س + ٧
		س ^٢ + ١٠س + ٢٥
		س ^٢ + ٣س - ١٢

(ب) **جبرياً:** اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة طرفها الأيمن يساوي صفر، وحلها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة.

(ج) **لفظياً:** قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب^٢ - ٤أج، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فصفها.

(د) **تحليلياً:** تنبأ بعدد حلول س^٢ - ٩س - ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبؤك بحل المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحذّر:** اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أس^٢ + ب س + ج، أ ≠ ٠، وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص = أ(س - هـ)^٢ + ك.

(٣٢) **تبرير:** حدّد عدد حلول المعادلة س^٢ + ب س = ج إذا كانت ج > - (ب/٤). فسّر إجابتك.

(٣٣) حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسّر إجابتك.

$$ن^٢ + \frac{١}{٣}ن + \frac{١}{٩}$$

$$ن^٢ - \frac{٢}{٣}ن + \frac{١}{٩}$$

$$ن^٢ + ن + \frac{١}{٤}$$

$$ن^٢ - ن + \frac{١}{٤}$$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

(٣٥) **اكتب:** قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تُستعمل لحل المعادلة: س^٢ - ٥س - ٧ = ٠

تدريب على اختبار

(٣٧) **إجابة قصيرة:** يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣٨ هـ، ما عدد السنوات اللازمة بعد عام ١٤٣٨ هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠ نسمة؟

(٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه ومساحته ٧٥ سنتيمتراً مربعاً، فما طوله؟

(ج) ١٠ سم

(أ) ٢٥ سم

(د) ٥ سم

(ب) ١٥ سم



مراجعة تراكمية

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (مهارة سابقة)

$$\frac{ج^3}{ج^2} \quad (٤٠)$$

$$\frac{٧٤}{٥٤} \quad (٣٩)$$

$$\frac{٦٤}{٣٤} \quad (٣٨)$$

حل كلاً من المتباينات الآتية: (مهارة سابقة)

$$١٣ \geq |٢ - ٥ب| \quad (٤٢)$$

$$٨ \leq |٢ - ٣ص| \quad (٤١)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

احسب قيمة $\sqrt{٢ \pm ٤ - ٢ب}$ أ ج في كلٍّ من الحالات الآتية:

$$١١ = ج، ١٢ = ب، ١ = أ \quad (٤٤)$$

$$٢ = ج، ٥ = ب، ٢ = أ \quad (٤٣)$$

$$٢ = ج، ١ = ب، ٣ = أ \quad (٤٦)$$

$$٦ = ج، ٤ = ب، ٢ = أ \quad (٤٥)$$

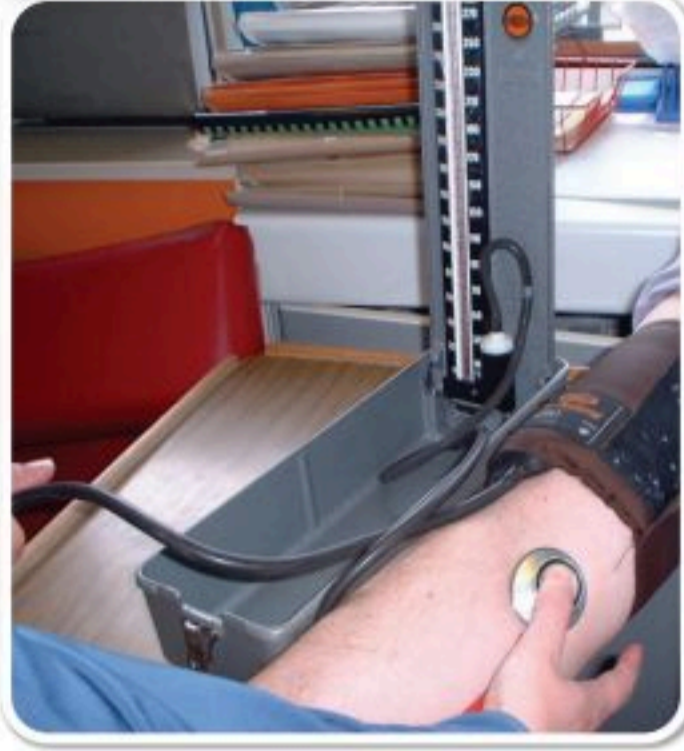


حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالملتر زئبق للأنتى البالغة بالدالة: ص = ٠,٠١س + ٠,٠٥ + ٠,٠٥س + ١٠٧، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأنتى إذا عُلِمَ ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: ينتج عن إكمال المربع للمعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، صيغة نستعملها لحل أية معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية، وتسمى هذه الصيغة **القانون العام**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

المفردات

القانون العام
المميز

أضف إلى

مطوبتك

القانون العام

مفهوم أساسي

حل المعادلة التربيعية: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ يُعبر عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

سيطلب إليك اشتقاق هذا القانون لاحقاً (في الدرس ٩ - ١)

مثال ١

استعمال القانون العام

حل المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ١٢ = ٠$ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$٣س^٢ + ٥س + ١٢ = ٠$$

$$٣س^٢ + ٥س - ١٢ = ٠$$

الخطوة ٢: طبق القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^٢ - ٤(٣)(-١٢)}}{٢(٣)}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ١٤٤}}{٦}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١٦٩}}{٦}$$

$$س = \frac{-٥ - ١٣}{٦} \text{ أو } س = \frac{-٥ + ١٣}{٦}$$

$$س = -٣ \text{ و } س = \frac{٤}{٣}$$

الحلان هما -٣ و $\frac{٤}{٣}$.

المعادلة الأصلية

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

القانون العام

$$أ = ٣، ب = ٥، ج = -١٢$$

اضرب

اجمع ثم أوجد الجذر التربيعي

افصل الحلين

بسط



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تحقق من فهمك

$$(أ) ٢س٢ + ٩س = ١٨. \quad (ب) ٤س٢ - ٢٤س + ٣٥ = ٠$$

عند تطبيقك القانون العام لحل المعادلات التربيعية قد تحتاج إلى تقريب بعض حلولها.

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد $\sqrt{1025}$ في المثال ٢ غير نسبي؛ لذا فالآلة الحاسبة تعطي فقط قيمة تقريبية له، أما الإجابة الدقيقة في المثال ٢ فهي:
 $\frac{1025 \pm 5}{20}$ أما العددين $1, 4, 9, 16$ فقيمتان تقريبتان.

مثال ٢ استعمال القانون العام

حلّ المعادلة $١٠س٢ - ٥س = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$١٠س٢ - ٥س = ٢٥$$

$$١٠س٢ - ٥س - ٢٥ = ٠$$

المعادلة الأصلية

اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$$س = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(10)(-25)}}{2(10)}$$

$$أ = ١٠، ب = -٥، ج = -٢٥$$

اضرب ثم اجمع

$$\frac{1025 \pm 5}{20} = \frac{1000 + 25 \pm 5}{20}$$

افصل الحلين

$$\frac{1025 \pm 5}{20} = س \quad \text{أو} \quad \frac{1025 \pm 5}{20} = س$$

بسط

$$١, ٩ \approx \quad ١, ٤ \approx$$

الحلان هما $١, ٤$ و $١, ٩$ تقريبًا.

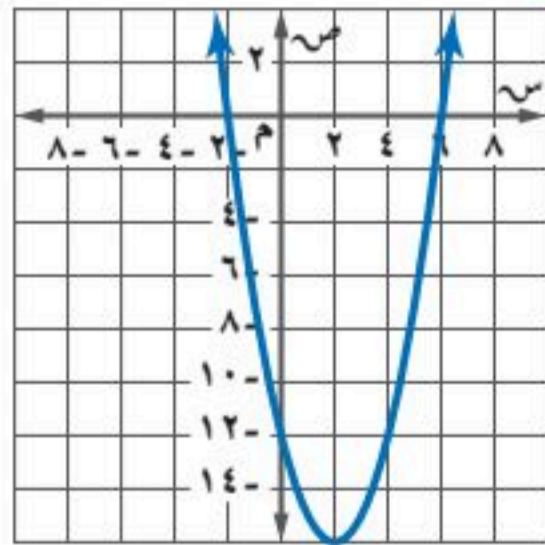
تحقق من فهمك

$$(٢) ٣س٢ - ٢س - ٩ = ٠$$

يمكنك استعمال طرق مختلفة لحل المعادلات التربيعية. ولا توجد طريقة هي الأفضل دائمًا لحل أي مسألة.

مثال ٣

حلّ المعادلات التربيعية باستعمال طرق مختلفة



حل المعادلة: $٢س٢ - ٤س = ١٢$.

الطريقة ١: التمثيل البياني

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية

$$٢س٢ - ٤س = ١٢$$

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

$$٢س٢ - ٤س - ١٢ = ٠$$

مثل الدالة المرتبطة $د(س) = ٢س٢ - ٤س - ١٢$ بيانيًا، وحدد المقطعين السينيين على التمثيل.

الحلان هما $-٢, ٦$.



وزارة التعليم

الطريقة ٢ : التحليل إلى عوامل

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأصلية} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} = ١٢ \\ \text{اطرح ١٢ من كلا الطرفين} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} - ١٢ = ٠ \\ & \quad \text{س}(\text{س} - ٦) = (٢ + \text{س})(٢ - \text{س}) \\ \text{حل} & \quad \text{س} - ٦ = ٠ \text{ أو } \text{س} + ٢ = ٠ \\ \text{خاصية الضرب الصفري} & \quad \text{س} = ٦ \quad \text{س} = -٢ \\ \text{إيجاد قيم س} & \end{aligned}$$

الطريقة ٣ : إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحدين اللذين يحتويان على س^2 ، س تم فصلهما.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأصلية} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} = ١٢ \\ \text{بما أن } \left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^2 = \frac{\text{س}^2}{٤} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} + ٤ = ١٢ + ٤ \\ \text{لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين} & \quad (\text{س} - ٢)^2 = ١٦ \\ \text{حل} & \quad \text{س} - ٢ = \pm ٤ \\ \text{أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين} & \quad \text{س} = ٢ \pm ٤ \\ \text{أضف ٢ لكلا الطرفين} & \quad \text{س} = ٦ \text{ أو } \text{س} = -٢ \\ \text{افصل الحلين} & \quad \text{س} = ٦ \quad \text{س} = -٢ \\ \text{بسّط} & \end{aligned}$$

الطريقة ٤ : القانون العام

من الطريقة الأولى، الصورة القياسية للمعادلة هي: $\text{س}^2 - ٤\text{س} - ١٢ = ٠$.

$$\begin{aligned} \text{القانون العام} & \quad \text{س} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{أضرب} & \quad \text{س} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} \\ \text{اجمع وبسّط} & \quad \text{س} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \\ \text{افصل الحلين} & \quad \text{س} = \frac{4 + 8}{2} \text{ أو } \text{س} = \frac{4 - 8}{2} \\ \text{بسّط} & \quad \text{س} = ٦ \quad \text{س} = -٢ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\text{٣ب) } \text{س}^2 - ٤\text{س} - ١١ = ٠$$

$$\text{٣ا) } \text{س}^2 - ١٧\text{س} + ٨ = ٠$$

تنبيه

الحلول

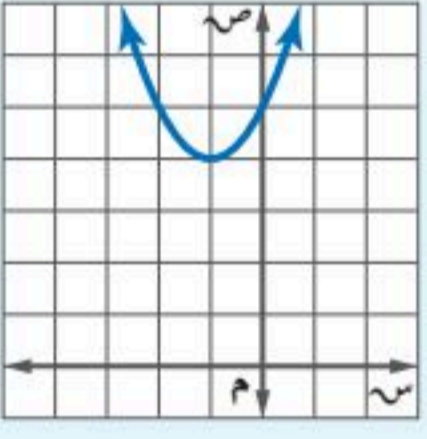
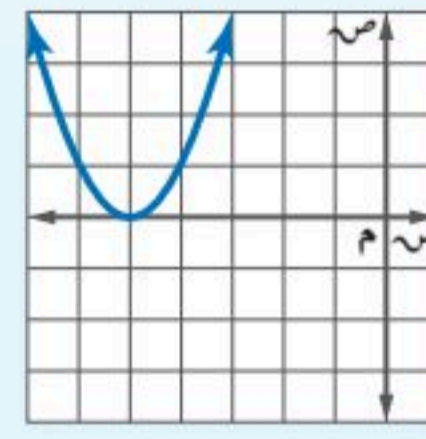
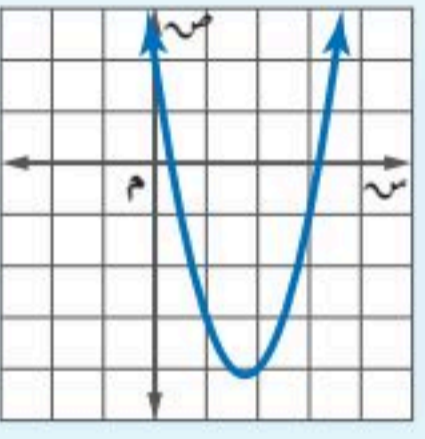
لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.



ويمكنك تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية في ملخص المفهوم الآتي :

أضف إلى مطوبتك	ملخص المفهوم	حل المعادلات التربيعية
	الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟
	التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.
	التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولاً.
	استعمال خاصية الجذر التربيعي	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة $س^2 = ن$ أو $س^2 = (س-هـ)$
	إكمال المربع	يمكن استعمالها لأي معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$ ، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان $ب$ عددًا زوجيًا و $أ = ١$.
	القانون العام	يمكن استعمالها لأي معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$.

المميز: في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر ($ب^2 - ٤ أ ج$) **المميز**، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

أضف إلى مطوبتك	مفهوم أساسي	استعمال المميز
	المعادلة	$س^2 + ٢س + ٥ = ٠$
	المميز	$ب^2 - ٤ أ ج = ١٦ - ٤٠ = -٢٤$ سالب
	تمثيل الدالة المرتبطة	
	عدد المقاطع السينية	عدد المقاطع السينية = ٠
	عدد الحلول الحقيقية	٠
		$س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$
	المميز	$ب^2 - ٤ أ ج = ١٠٠ - ١٠٠ = ٠$ صفر
	تمثيل الدالة المرتبطة	
	عدد المقاطع السينية	عدد المقاطع السينية = ١
	عدد الحلول الحقيقية	١
		$٢س^2 - ٧س + ٢ = ٠$
	المميز	$ب^2 - ٤ أ ج = ٤٩ - ١٦ = ٣٣$ موجب
	تمثيل الدالة المرتبطة	
	عدد المقاطع السينية	عدد المقاطع السينية = ٢
	عدد الحلول الحقيقية	٢

مثال ٤ استعمال المميز

أوجد قيمة المميز للمعادلة: $٤س^2 - ٥س - ٣ = ٠$ ، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية: $٤س^2 - ٥س - ٣ = ٠$ ← $٤س^2 - ٥س + ٣ = ٠$

الخطوة ٢: أوجد المميز.

$$ب^2 - ٤ أ ج = (-٥)^2 - ٤(٤)(٣) = ٢٥ - ٤٨ = -٢٣$$

$$أ = ٤، ب = -٥، ج = ٣$$

بسّط

بما أن المميز سالب فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك ✓

$$٤ (أ) ٢س^2 + ١١س + ١٥ = ٠ \quad ٤ (ب) ٩س^2 - ٣٠س + ٢٥ = ٠$$

ارشادات للدراسة

المميز:

تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.



وزارة التعليم

حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرَّبًا للحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

$$(1) \text{ س } 2 - 2 \text{ س} - 15 = 0 \quad (2) \text{ س } 2 - 8 \text{ س} - 10 = 0 \quad (3) \text{ س } 5 + 5 = 13 \text{ س}$$

حل كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(4) \text{ س } 2 + 11 \text{ س} - 6 = 0 \quad (5) \text{ س } 2 - 3 \text{ س} - 6 = 0 \quad (6) \text{ س } 9 = 25$$

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(7) \text{ س } 2 - 9 \text{ س} + 21 = 0 \quad (8) \text{ س } 9 + 2 \text{ س} - 24 = 16 \quad (9) \text{ س } 3 - 2 \text{ س} = 8$$

(10) **منصة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة $l = -16n^2 + 4n + 6$ ، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع 20 قدمًا. فسّر إجابتك.

المثالان ١، ٢

مثال ٣

مثال ٤

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرَّبًا للحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

$$(11) \text{ س } 4 + 2 \text{ س} - 6 = 0 \quad (12) \text{ س } 2 + 16 = 0 \quad (13) \text{ س } 6 - 2 \text{ س} - 12 \text{ س} + 1 = 0$$

$$(14) \text{ س } 5 - 2 \text{ س} - 8 = 6 \quad (15) \text{ س } 5 + 2 \text{ س} - 21 = 18 \quad (16) \text{ س } 2 = 12 \text{ س} - 18$$

حل كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(17) \text{ س } 2 - 2 \text{ س} - 8 = 12 \quad (18) \text{ س } 3 - 2 \text{ س} - 24 = 36 \quad (19) \text{ س } 3 - 2 \text{ س} = 10$$

مثال ٤ أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(20) \text{ س } 2 - \frac{4}{5} \text{ س} = 3 \quad (21) \text{ س } 5, 2 \text{ س} - 2 \text{ س} = 2 \quad (22) \text{ س } 0, 2 \text{ س} - 2 \text{ س} + 9 = 2$$

(23) **مرور:** تمثّل المعادلة $f = 0.07e + 19$ ، ع المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ساعة للتوقف تمامًا بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع 80 كلم/ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد 55 مترًا من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسّر تبريرك.



الربط بالحياة

من أسباب الحوادث المرورية: القيادة في أثناء التعب والإرهاق، الانشغال عن القيادة، عدم التقيد بأنظمة المرور، التهور في القيادة، وعدم ربط حزام الأمان وغيرها؛ حيث بلغ عدد ضحايا الحوادث المرورية في عام 2020 م 4618 شخصًا.

(24) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقًا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزءًا من المساحة بنصوص كتابية.

- (أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي.
(ب) حلّ المعادلة باستعمال القانون العام.
(ج) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟



حدّد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

(٢٥) $٤س + ٣ = ٣س - ٢س$ (٢٦) $س٢ + \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}س$ (٢٧) $٠,٢٥س + ٢س = ١ - ٢س$

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

(٢٨) $٢س - ٧ = ٥س - ١$ (٢٩) $٢س٣ - ٤س٢ = ١$ (٣٠) $٦,٨س = ٢س - ٥$

(٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسية في هذه المسألة:

(أ) جدولياً: انسخ الجدول الآتي وأكمّله:

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	$١ = ٢$	$٢ = ١٢$	$٤ = ٢٢$				

(ب) بيانياً: مثل المعلومات المعطاة في الجدول بيانياً باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟

(ج) تحليلياً: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثّل هذا النمط.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٢) **تحّد:** أوجد جميع قيم ك التي تجعل للمعادلة: " $٢س٢ - ٣س + ٥ك = ٠$ " حلين حقيقيين.

تبرير: بين فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل:

(٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

(٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

(٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

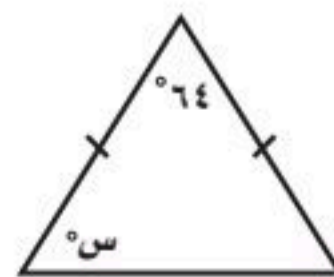
(٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية.

(٣٧) **مسألة مفتوحة:** اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالبًا، ومميز الثالثة صفرًا.

(٣٨) **اكتب:** وضح طرق حل المعادلات التربيعية، وأعطِ مثالاً مختلفاً لكل طريقة. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار

(٣٩) **إجابة قصيرة:** إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟



(٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية $٦س٢ + ٦س - ٧٢ = ٠$ ؟

(ج) لا يوجد حلول حقيقية

(أ) ٣ أو -٤

(د) ١٢ أو -٤٨

(ب) -٣ أو ٤

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً: (الدرس ٨-٣)

$$(٤٣) \quad ٢٥ - ٢س = ٢٠$$

$$(٤٢) \quad ١٢ - ٢س = ٩$$

$$(٤١) \quad ٠ = ١٢ + ١٧س - ٢س$$

لتكن $ص = ٢س - ٥س + ٤$. (الدرس ٨-١)

(٤٤) اكتب معادلة محور التماثل.

(٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمى أم صغرى؟

(٤٦) مثل الدالة بيانياً.

(٤٧) حدّد مجال الدالة ومداهما.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

$$(٥٠) \quad \sqrt{٠,٠١}$$

$$(٥٣) \quad \sqrt{٨١}$$

$$(٤٩) \quad \sqrt{\frac{٩}{١٦}}$$

$$(٥٢) \quad \frac{٢}{\sqrt{١٦}}$$

$$(٤٨) \quad \sqrt{١٠٠}$$

$$(٥١) \quad \frac{\sqrt{٤}}{٣}$$



(١٣) **كرة سلة:** سدّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة $ع = ١٦ن^٢ + ٦٠ن + ٣٠$ ، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

(١٤) مثلّ الدالة: $ص = ٣س^٢$ بيانيًا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداهما.

(١٥) **اختيار من متعدد:** أي مما يلي يُعدّ تحليلًا تامًّا للعبارة

٤ س $٨ - ١٢$ إلى عواملها؟

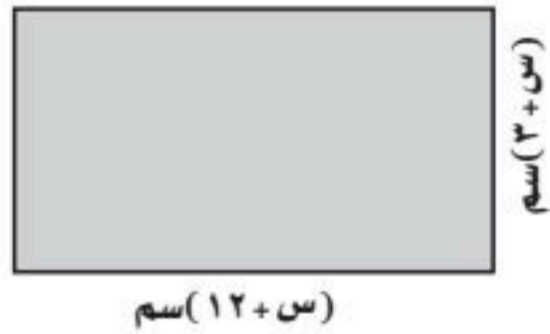
(أ) $٤ (٣ - س) (١ + س)$

(ب) $٤ (١٢ + س) (١ - س)$

(ج) $٤ (٣ + س) (١ - س)$

(د) $٤ (٣ - س) (٤ + س)$

(١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه.



(١٧) مثلّ مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًا:

$\{(٤, ٢), (١, ١), (٠, ٠), (١, -١), (٤, -٢)\}$ وحدّد فيما إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية.

(١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة

لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًا، وحدّد مجالهما ومداهما:

(١) $ص = ٢س^٢ + ٥س + ١$ (٢) $ص = ٢س^٢ - ٣س + ١$

لتكن الدالة $ص = ٢س^٢ - ٧س + ٦$.

(٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

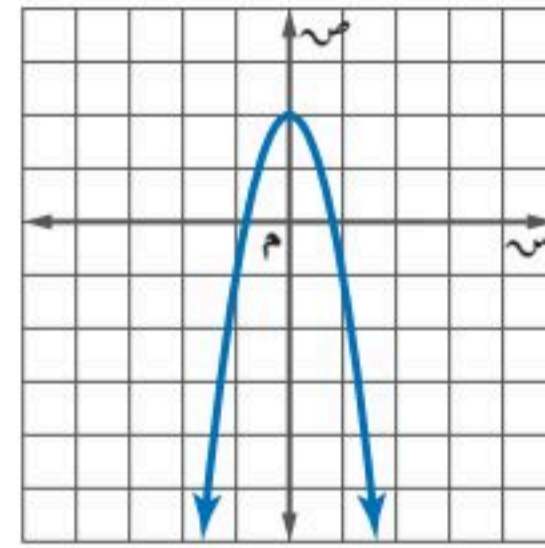
(٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

(٥) حدد مجال الدالة ومداهما.

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

(٦) $٦س^٢ + ٧س + ١٠ = ٠$ (٧) $٥س^٢ - ٣س = ٠$

(٨) **اختيار من متعدد:** أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



(أ) $ص = ٣س^٢ - ٢$ (ب) $ص = ٣س^٢ + ١$

(ج) $ص = ٢س^٢ + ٢$ (د) $ص = ٣س^٢ - ٢ + ٢$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

(٩) $٦س^٢ - ٦س - ٦ = ٠$ (١٠) $٢س^٢ - ٣٦س - ٦ = ٠$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

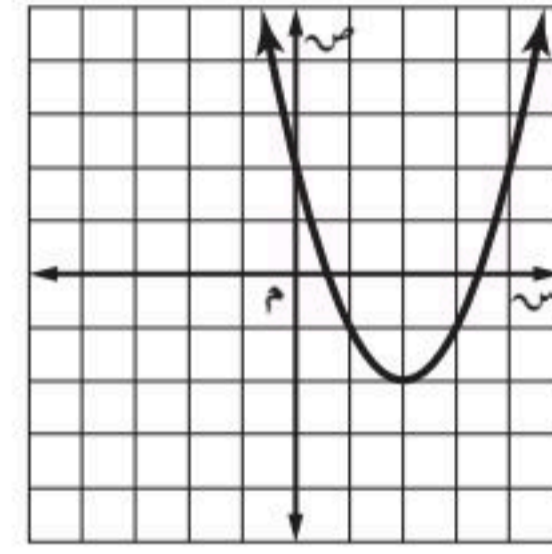
(١١) $٣٠س - ٢س - ٣٠ = ٠$ (١٢) $٢س^٢ + ١٥س - ١٥ = ٠$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟



- (أ) (٠، ٢) (ب) (٢، ٠)
(ج) (٢، -٢) (د) (-٢، ٢)

٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{9}{10}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع.

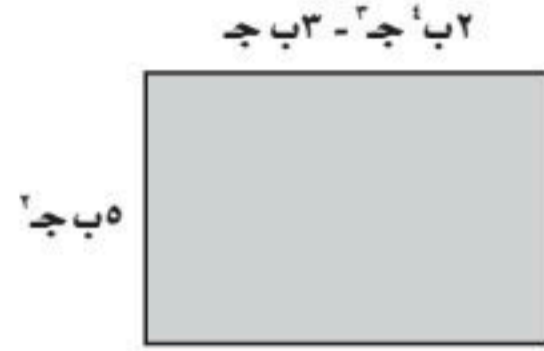
- (أ) $ص = 3س + \frac{9}{10}$
(ب) $ص = \frac{9}{10}س + 3$
(ج) $ص = \frac{9}{10}س - 3$
(د) $ص = 3س - \frac{9}{10}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه هي $٣س^٢ + ١٩س - ١٤$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟



- (أ) $٧ + س$ (ب) $٧ - س$
(ج) $٢ + س$ (د) $٢ - س$

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه.



- (أ) $١٠ب١ج٢ - ٣بج$
(ب) $١٠ب١ج٢ - ١٥ب٢ج٣$
(ج) $٢ب١ج٢ - ٣ب٢ج٣$
(د) $١٠ب١ج٢ - ٦ب٤ج٦ - ١٥بج٢$

٥) حل المعادلة التربيعية: $س٢ - ٢س - ١٥ = ٠$

- (أ) -١، ٤
(ب) -٣، ٥
(ج) ٣، -٥
(د) \emptyset

٦) ما قيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٨، -٤)$ ، $(١٢، ر)$ يساوي $\frac{٤}{٣}$ ؟

- (أ) -٤
(ب) -١
(ج) ٢
(د) ٣



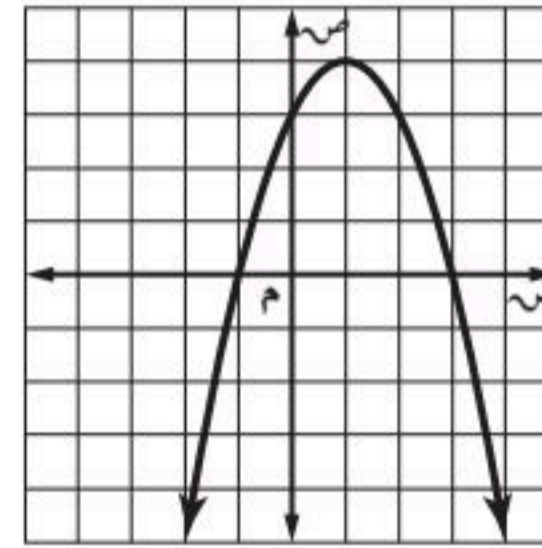
إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$٢س^٢ - ٦س + ٣ = ٠$$

(٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.



(أ) ما إحداثيًا الرأس؟

(ب) ما إحداثيا نقطة التقاطع مع المحور الصادي؟

(ج) ما معادلة محور التماثل؟

(٩) ثمن ٥ دفاتر و ٣ أقلام ١٩,٥ ريالاً، وثمان ٤ دفاتر و ٦ أقلام ٢١ ريالاً، استعمل هذه المعطيات في الإجابة عما يأتي:

(أ) اكتب نظاماً من المعادلات يمثل هذا الموقف.

(ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كل من الدفتر والقلم؟

(١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (ج)
١	٤٥ ج
٢	٧٠ ج
٣	٩٥ ج
٤	١٢٠ ج

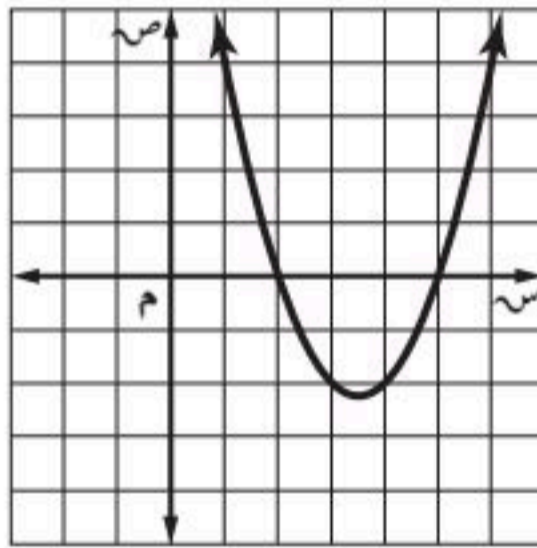
(أ) اكتب دالة تمثل هذا الموقف.

(ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(١١) استعمل الدالة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



(أ) حلّ العبارة $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ إلى عواملها الأولية.

(ب) ما حلّ المعادلة: $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟

(ج) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية؟ وأين يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟ فسر إجابتك.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..

الفصل ٩

المعادلات الجذرية والمثلثات

فيما سبق

درستُ حل المعادلات التربيعية.

والآن

- أبسط عبارات جذرية وأجمعها، وأطرحها، وأضربها.
- أحل معادلات جذرية.
- أستعمل نظرية فيثاغورس.
- أجد النسب المثلثية.

لماذا؟

المحيطات: يتكون التسونامي أو الموجات العالية من هزات أرضية تحت البحر. ويمكن استعمال معادلة جذرية لإيجاد سرعة التسونامي بالمتري لكل ثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

المفردات:

- إنطاق المقام ص (١٤٤)
- المعادلات الجذرية ص (١٥٤)
- الحلول الدخيلة ص (١٥٥)
- النسب المثلثية ص (١٧٥)

منظم أفكار

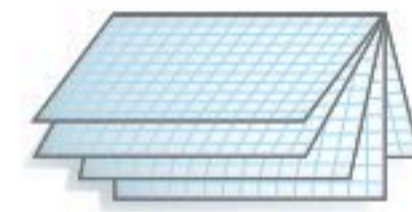
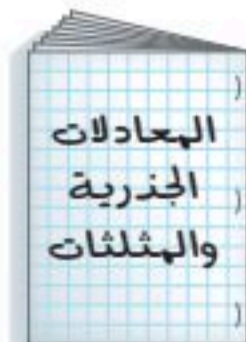
المطويات

المعادلات الجذرية والمثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول المعادلات الجذرية والمثلثات مبتدئاً بأربع أوراق مربعات.

٣ سَمِّ غلاف المطوية بعنوان الفصل، ثم اكتب كذلك عنوان كل درس في الفصل على كل صفحة من صفحاتها بدءاً من اليمين.

٢ ثَبِّت الأوراق معاً عند خط الطي.

١ اطو الأوراق من المنتصف عرضياً.





التهيئة للفصل ٩

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

أوجد الجذر التربيعي للعدد ٥٠ مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

استعمل الحاسبة $50 \approx 7,071067812 \dots$ وإلى أقرب جزء من مئة $50 \approx 7,07$.

مثال ٢

بسّط العبارة: ٣س + ٧ص - ٤س - ٨ص

٣س + ٧ص - ٤س - ٨ص

العبارة الأصلية
اجمع الحدود المتشابهة
بسّط

مثال ٣

حلّ المعادلة: ٢س - ٥س + ٦ = ٠

المعادلة الأصلية

حلّ إلى العوامل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$٢س - ٥س + ٦ = ٠$$

$$٠ = (٣ - ٢س)$$

$$٠ = ٣ - ٢س \text{ أو } ٠ = ٢ - ٣س$$

$$٣ = ٢س \quad ٢ = ٣س$$

مثال ٤

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٨}{١٢}$ تشكّان تناسبًا أم لا.

اكتب المعادلة

اضرب تبادليًا

بسّط

$$\frac{٨}{١٢} \stackrel{?}{=} \frac{٢}{٣}$$

$$٨(١٢) \stackrel{?}{=} ٢(٨)$$

$$٢٤ = ٢٤ \checkmark$$

لذا، فهما تشكّان تناسبًا.

اختبار سريع

أوجد الجذر التربيعي لكل ممّا يأتي، مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر: (مهارة سابقة)

$$٨٢ \sqrt{\quad} (١) \quad ٢٦ \sqrt{\quad} (٢)$$

$$١٥ \sqrt{\quad} (٣) \quad ٩٩ \sqrt{\quad} (٤)$$

(٥) صندوق الرمل: إذا صنع إسحاق صندوقًا رمليًا قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٦) (٢١س + ١٥ص) - (٩س - ٤ص)$$

$$(٧) ١٣س - ٥ص + ٢ص$$

$$(٨) (١٠ - أ٥) + (ب٥ + أ٦)$$

$$(٩) ٦م + ٥ن + ٤ - ٣م - ٢ن + ٦$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (الدرسان ٨ - ٨.٣ - ٤)

$$(١٠) ٢س - ٤س = ٠$$

$$(١١) ٢س + ٧ص - ٥ = ١$$

(١٢) هندسة: إذا كانت مساحة

المستطيل المجاور ٩٠ سم^٢،

فما قيمة س؟



س - ١

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان الآتيتان تشكّان تناسبًا، واكتب "نعم" أو "لا": (مهارة سابقة)

$$(١٣) \frac{٤}{٩}, \frac{٢}{٣} \quad (١٤) \frac{١٥}{٢٠}, \frac{٣}{٤}$$

(١٥) خرائط: إذا مثّلت مسافة ١٠ كلم ستمترًا واحدًا على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟





تبسيط العبارات الجذرية

لماذا؟

تؤدي الأقمار الاصطناعية العديد من المهام، منها: دراسة الكون والتنبؤ بالطقس، والاتصالات بأنواعها، وتيسير الملاحة البحرية والجوية... إلى غير ذلك، حيث تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، يمكن حسابها بالعلاقة:

$$ع = \sqrt{\frac{١٤١٠ \times ٤}{نق}}$$

الاصطناعي بوحدته المتر/ ثانية، (نق) نصف قطر المدار ويساوي بعد القمر عن مركز الأرض.

ويذكر أن المملكة العربية السعودية أطلقت منظومة أقمار اصطناعية تجارية صغيرة يصل عددها إلى ٢٤ قمراً.

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العبارة الجذرية** جذراً، كالجذر التربيعي مثلاً، وتكون العبارة

الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية في العبارة التي تحت الجذر:

- لا يكون أيٌّ من عوامله مربعاً كاملاً عدا ١.
- لا يتضمن كسوراً.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

ويمكنك استعمال الخاصية الآتية لتبسيط الجذور التربيعية.

١-٩

فيما سبق

درست إيجاد الجذور التربيعية.

والآن

- أستعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.
- أستعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

المفردات

- العبارة الجذرية
- إنطاق المقام
- المرافق

أضف إلى

مطويتك

خاصية ضرب الجذور التربيعية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: الجذر التربيعي للمقدار $أ ب$ لأي عددين حقيقيين غير سالبين $أ ، ب$ ، الجذر التربيعي للمقدار $أ$ يساوي الجذر التربيعي للمقدار $أ$ مضروباً في الجذر التربيعي للمقدار $ب$.

$$\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب} ، إذا كانت $أ \geq ٠ ، ب \geq ٠$$$

الرموز:

$$\sqrt{٦} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٦}$$

أمثلة:

تبسيط الجذور التربيعية

مثال ١

بسّط العبارة: $\sqrt{٨٠}$.

حلّل ٨٠ إلى عوامله الأولية

خاصية ضرب الجذور

بسّط

$$\sqrt{٨٠} = \sqrt{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$$

$$= \sqrt{٥} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} =$$

$$= \sqrt{٥} \times ٢ \times ٢ =$$

تحقق من فهمك

$$(ب) \sqrt{١٨٠}$$

$$(أ) \sqrt{٥٤}$$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

مثال ٢

ضرب الجذور التربيعية

بسّط العبارة: $\sqrt{14} \times \sqrt{2}$

خاصية ضرب الجذور

$$\sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{14} \times \sqrt{2}$$

خاصية ضرب الجذور

$$\sqrt{7} \times 2 = \sqrt{7} \times \sqrt{2^2} =$$

تحقق من فهمك ✓

(ب) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$

(أ) $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$

عند النظر إلى العبارة $\sqrt{2s}$ قد يبدو لك أن $s = \sqrt{2s}$ ، لذا عند إيجادك الجذر التربيعي الرئيس لعبارة تحتوي متغيرات، عليك التأكد من أن النتيجة ليست سالبة. فمثلاً، افرض أن $s = -3$.

$$\sqrt{2s} = \sqrt{2 \times (-3)}$$

عوض عن s بـ (-3)

$$\sqrt{2 \times (-3)} = \sqrt{-6}$$

$$9 = 2 \times (-3)$$

$$3 = \sqrt{9}$$

$$3 = \sqrt{9}$$

$$3 \neq -3$$

عند تبسيط العبارات الجذرية، إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيراً ذا أس زوجي، وناتج تبسيطه ذا أس فردي، يجب استعمال القيمة المطلقة والأمثلة التالية توضح ذلك.

$$\sqrt{3s} = \sqrt{6s} \times \sqrt{2s}$$

$$\sqrt{2s} = \sqrt{4s} \times \sqrt{s}$$

$$\sqrt{3s} = \sqrt{9s} \times \sqrt{s}$$

$$\sqrt{2s} = \sqrt{4s} \times \sqrt{s}$$

تبسيط الجذر التربيعي لمتغيرات

مثال ٣

بسّط العبارة: $\sqrt{90s^3v^4k^5}$

حلّل إلى العوامل الأولية

$$\sqrt{90s^3v^4k^5} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5 \times s^2 \times s \times v^2 \times v^2 \times k^4 \times k}$$

$$\sqrt{2 \times 3^2 \times 5 \times s^2 \times s \times v^2 \times v^2 \times k^4 \times k} = \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{5} \times s \times v^2 \times k^2 \times \sqrt{k}$$

بسّط

$$3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times s \times v^2 \times k^2 \times \sqrt{k}$$

بسّط

$$3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times s \times v^2 \times k^2 \times \sqrt{k}$$

تحقق من فهمك ✓

(ب) $\sqrt{56s^5v^3k^7}$

(أ) $\sqrt{32r^2k^4t^5}$

خاصية قسمة الجذور التربيعية: يمكنك استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية عند قسمة الجذور التربيعية وتبسيط العبارات الجذرية.

أضف إلى

مطويتك

خاصية قسمة الجذور التربيعية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a ، b ، حيث $a \leq b$ ، $b > 0$ ، الجذر التربيعي للمقدار $\frac{a}{b}$ يساوي الجذر التربيعي للبسط أمقسوماً على الجذر التربيعي للمقام b .

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

الرموز:

قراءة الرياضيات

الكسور تحت الجذر

تُقرأ العبارة $\sqrt{\frac{a}{b}}$: الجذر التربيعي لـ $\frac{a}{b}$ على b ، أو الجذر التربيعي للمقدار "أ" على "ب".

يمكنك استعمال خصائص الجذر التربيعي **لإنطاق المقام** وكتابته على صورة عدد نسبي إذا كان جذراً، وهذا يتضمن ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

مثال ٤ من اختبار

أكتب العبارة $\sqrt{\frac{35}{15}}$ في أبسط صورة.

(أ) $\frac{\sqrt{210}}{15}$ (ب) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{525}}{15}$ (د) $\frac{\sqrt{35}}{15}$

إرشادات للاختبار

تبسيط:

انظر أولاً إلى ما تحت الجذر إن كان يمكن تبسيطه؛ لأن ذلك يجعل حساباتك أبسط.

اقرأ الفقرة:

يجب تبسيط العبارة الجذرية.

حل الفقرة:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{35}{15}} &= \sqrt{\frac{7}{3}} \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} &= \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \\ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} &= \end{aligned}$$

بسط الكسر

خاصية قسمة الجذور

اضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

خاصية ضرب الجذور

إذن البديل الصحيح هو ب

تحقق من فهمك

٤) بسط العبارة: $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{12}}$

كلٌّ من ثنائيي الحد $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ، أو $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ تسمى **مرافقة** للأخرى حيث أ، ب، ج، د أعدادٌ نسبية، فعلى سبيل المثال $\sqrt{7} + 2$ و $\sqrt{7} - 2$ مترافقتان. حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد نسبي، ويمكن إيجاداه باستعمال الفرق بين مربعين.

مثال ٥ استعمال المرافق في إنطاق المقام

$$\begin{aligned} \text{بسط العبارة: } \frac{3}{\sqrt{2}+5} \\ \frac{3}{\sqrt{2}+5} \times \frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5} &= \frac{3}{\sqrt{2}-5} \\ \frac{(\sqrt{2}-5)3}{\sqrt{2}(\sqrt{2})-25} &= \\ \frac{\sqrt{2}3-15}{2-25} &= \end{aligned}$$

مرافق $\sqrt{2}+5$ هو $\sqrt{2}-5$

(أ-ب) (ب+أ) = $\sqrt{2}-5$

$2 = \sqrt{2}(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

١٥) $\frac{3}{\sqrt{2}+2}$ (ب) $\frac{7}{\sqrt{2}-3}$



الأمثلة ٣-١

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١) $\sqrt{24}$ (٢) $\sqrt{16} \sqrt{3}$ (٣) $\sqrt{25} \sqrt{2}$
 (٤) $\sqrt{14} \times \sqrt{10}$ (٥) $\sqrt{18} \times \sqrt{3}$ (٦) $\sqrt{10} \sqrt{4} \times \sqrt{10} \sqrt{3}$
 (٧) $\sqrt{60} \sqrt{3} \sqrt{5}$ (٨) $\sqrt{81} \sqrt{3} \sqrt{2}$ (٩) $\sqrt{99} \sqrt{3}$

مثال ٤

(١٠) اختيار من متعدد: بسّط العبارة $\frac{\sqrt{45}}{10}$

- (أ) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (ب) $\frac{\sqrt{45}}{10}$ (ج) $\frac{\sqrt{50}}{10}$ (د) $\frac{\sqrt{23}}{2}$

مثال ٥

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١١) $\frac{3}{5\sqrt{3}}$ (١٢) $\frac{5}{6\sqrt{2}}$ (١٣) $\frac{2}{10\sqrt{1}}$
 (١٤) $\frac{1}{12\sqrt{4}}$ (١٥) $\frac{4}{7\sqrt{6}}$ (١٦) $\frac{6}{11\sqrt{5}}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ٣-١

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١٧) $\sqrt{52}$ (١٨) $\sqrt{56}$ (١٩) $\sqrt{72}$
 (٢٠) $\sqrt{18} \sqrt{3}$ (٢١) $\sqrt{24} \sqrt{3}$ (٢٢) $\sqrt{245}$
 (٢٣) $\sqrt{15} \sqrt{5}$ (٢٤) $\sqrt{7} \sqrt{2} \times \sqrt{8} \sqrt{3}$ (٢٥) $\sqrt{8} \sqrt{5} \times \sqrt{2} \sqrt{4}$
 (٢٦) $\sqrt{25} \sqrt{3}$ (٢٧) $\sqrt{81} \sqrt{5}$ (٢٨) $\sqrt{28} \sqrt{3}$
 (٢٩) $\sqrt{75} \sqrt{3}$ (٣٠) $\sqrt{66} \sqrt{4}$ (٣١) $\sqrt{10} \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sqrt{3}$

(٣٢) **مكافحة حرائق:** تمثل سرعة الماء (ع) الذي يُضخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة $\sqrt{2} = \sqrt{f}$ جـ، حيث (ف) أقصى ارتفاع للماء، (جـ) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدمًا/ث^٢).

(أ) حل المعادلة بالنسبة لـ ف.

(ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدمًا، فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدمًا/ث؟ فسر إجابتك.

(ج) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدمًا. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدمًا/ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسر إجابتك.



الربط مع الحياة

صدر الأمر الملكي في عام ١٣٤٦ هـ بإنشاء أول فرقة إطفاء في المملكة في مكة المكرمة ضمن جهاز البلدية، وفي عام ١٣٨٥ هـ عدّل مُسمّى المديرية العامة للإطفاء إلى المديرية العامة للدفاع المدني.

المثالان ٤، ٥ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\begin{aligned} (33) \quad & \sqrt[3]{\frac{32}{t^4}} \\ (34) \quad & \sqrt[3]{\frac{27}{m^5}} \\ (35) \quad & \frac{\sqrt[3]{168j^3}}{\sqrt[3]{2127j^3}} \\ (36) \quad & \sqrt[3]{\frac{9}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{3}{16}} \\ (37) \quad & \frac{9}{\sqrt[3]{8}-6} \\ (38) \quad & \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(٣٩) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: $v = \sqrt{\frac{2Q}{k}}$ ، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

(أ) بسّط المعادلة معتبراً كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات.

(ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

(٤٠) **قفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي (ن) بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع (ل) بالأقدام يُعطى بالمعادلة: $n = \sqrt{\frac{l}{16}}$ ، فما الارتفاع الذي سقط منه مظليٌّ إذا كان الزمن قبل فتح المظلة كما هو

موضَّح بالجدول الآتي:

الارتفاع	٤	٥	٦	٧
زمن السقوط				

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤١) **تبرير:** وضح كيف تحل $2(2-s) = 2(6+s)$.

(٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائيتي حد على الصورة $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ أو $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ ، أ \sqrt{b} ، ب \sqrt{c} ثم أوجد ناتج ضربهما.

(٤٣) **تحديد:** استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية لتشتق القانون العام لحل المعادلة التربيعية من خلال حل المعادلة $as^2 + bs + c = 0$ (ابدأ بإكمال المربع).

(٤٤) **اكتب:** ملخصاً تبين فيه كيف تكتب عبارة جذرية في أبسط صورة.

تدريب على اختبار

(٤٦) أيّ العبارات الآتية تكافئ $\sqrt[3]{160s^2}$ ص^٥؟

(أ) $\sqrt[3]{160s^2}$ ص^{١٠}

(ب) $\sqrt[3]{160s^2}$ ص^{١٦}

(ج) $\sqrt[3]{160s^2}$ ص^٤

(د) $\sqrt[3]{160s^2}$ ص^{١٠}

(٤٥) **إجابة قصيرة:** دفع أحمد قيمة فاتورة الكهرباء أقل بـ ٢٣ ريالاً مما دفع خالد. وكان مجموع قيمة الفاتورتين ١٠٩ ريالاً. اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد قيمة فاتورة خالد.



مراجعة تراكمية

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرَّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ٨-٤)

$$(٤٩) \quad ١١س - ٢س = ٣$$

$$(٤٨) \quad ٤و + ٢و = ١٠٠ + ٤٠و$$

$$(٤٧) \quad ٠ = ٢٥ + ٢ر$$

حلّ كل كثيرة حدود فيما يأتي، إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب أولية: (مهارة سابقة)

$$(٥٢) \quad ٢٧ + ٣س - ٣س - ٢س - ٩س + ٢٧$$

$$(٥١) \quad ٢٧ - ٢ت$$

$$(٥٠) \quad ٢٩ - ٤$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة :

حلّ كلًّا من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

$$(٥٥) \quad ١٨٠$$

$$(٥٤) \quad ٨٨$$

$$(٥٣) \quad ٢٤$$

$$(٥٨) \quad ٩٠$$

$$(٥٧) \quad ٦٠$$

$$(٥٦) \quad ٣١$$





درست خصائص الأسس للأعداد الكلية إلا أن بعض الأسس قد تكون أعدادًا نسبية أو كسورًا. ويمكنك في هذا النشاط استعمال الحاسبة لاستكشاف معنى الأسس النسبية.

نشاط الأسس النسبية

العبارة	القيمة	العبارة	القيمة
$\sqrt[4]{16}$	٤	$\frac{1}{2}\sqrt{16}$	٤
$\sqrt[4]{25}$		$\frac{1}{2}\sqrt{25}$	
$\sqrt[3]{64}$		$\frac{1}{3}\sqrt[3]{64}$	
$\sqrt[3]{125}$		$\frac{1}{3}\sqrt[3]{125}$	
$\sqrt[2]{64}$		$\frac{2}{3}\sqrt[3]{64}$	
$\sqrt[3]{81}$		$\frac{2}{4}\sqrt[4]{81}$	

الخطوة ١: احسب قيمة $\sqrt[4]{16}$ ثم $\frac{1}{2}\sqrt{16}$.

اضغط المفاتيح: $16 \wedge (1 \div 2) \text{ enter}$

اضغط المفاتيح: $\text{ctrl } x^y 16 \text{ enter}$

سجّل النتائج في الجدول المجاور.

الخطوة ٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل عبارة، ثم سجّل النتائج في جدولك.

لإيجاد الجذور الأخرى غير الجذر التربيعي، اختر دالة $\sqrt[n]{\quad}$ بالضغط

على المفاتيح $\text{ctrl } \wedge$.

(أ) ما الذي تلاحظه في أثناء دراستك الجدول حول قيمة العبارة التي على

الصورة أ^١ ؟

(ب) ما الذي تلاحظه حول قيمة العبارة التي على الصورة أ^٢ ؟

تمارين

(١) تذكر خاصية قوة القوة لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن. $(A^m)^n = A^{m \times n}$

افترض أن الأسس الكسرية تعامل معاملة أسس الأعداد الكلية، وأوجد قيمة $(\frac{1}{3})^2$

$$\text{خاصية قوة القوة} \quad \frac{1}{3} \times 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{بسط} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

لذا، فإن $\frac{1}{3}$ هو عدد مربعه يساوي $\frac{1}{3}$ ؛ لذا فمن الممكن تعريف $\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}$. استعمل طريقة مشابهة لتعريف $\frac{1}{3}$.

(٢) عرّف $\frac{2}{3}$. برّر إجابتك.

اكتب كل جذر فيما يأتي على صورة عبارة أسية باستعمال الأسس النسبية، ثم أوجد قيمتها:

(٤) $\sqrt[4]{121}$

(٣) $\sqrt[3]{36}$

(٦) $\sqrt[6]{32}$

(٥) $\sqrt[5]{256}$

(٨) $\sqrt[8]{1296}$

(٧) $\sqrt[7]{28}$

(١٠) $\sqrt[10]{38}$

(٩) $\sqrt[9]{16}$

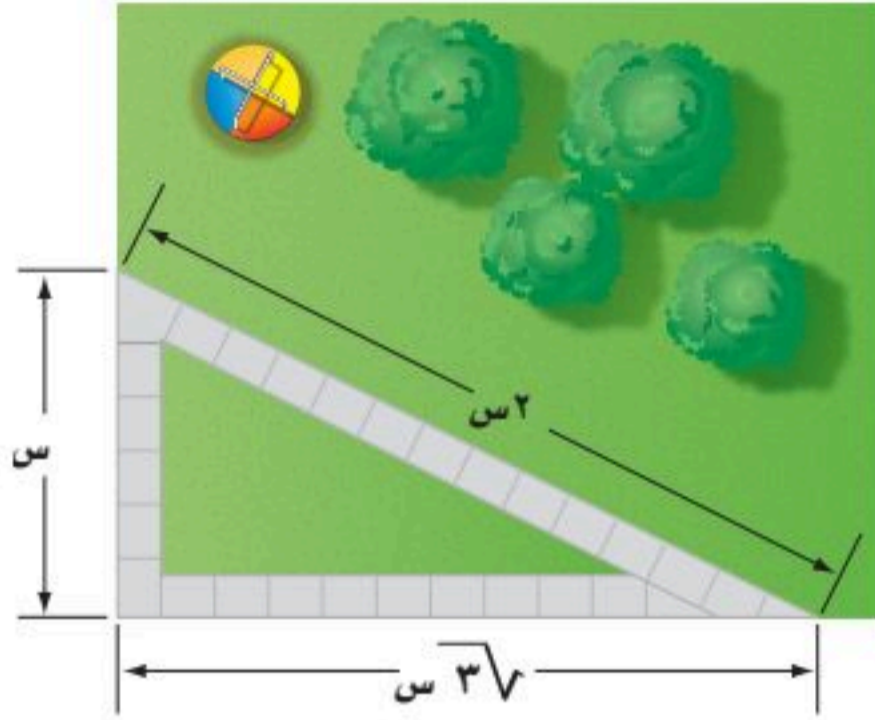




العمليات على العبارات الجذرية

لماذا؟

يتدرب خالد على الجري في الحديقة، في مسار على صورة مثلث كما في الشكل المجاور؛ استعداداً للمشاركة في مسابقات الجري، منهيًا ثلاث دورات يوميًا. ما المسافة التي يقطعها في دورة الجري الواحدة؟ وما المسافة التي يقطعها يوميًا؟



جمع العبارات الجذرية وطرحها: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

العبارات الجذرية

$$\sqrt{5}(2 + 4) = \sqrt{5} \cdot 2 + \sqrt{5} \cdot 4$$

$$\sqrt{5} \cdot 6 =$$

$$\sqrt{3}(2 - 9) = \sqrt{3} \cdot 2 - \sqrt{3} \cdot 9$$

$$\sqrt{3} \cdot 7 =$$

وحيدات الحد

$$1(2 + 4) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4$$

$$1 \cdot 6 =$$

$$9(2 - 9) = 9 \cdot 2 - 9 \cdot 9$$

$$9 \cdot 7 =$$

لاحظ أن ما تحت الجذر لا يتغير عند جمع العبارات الجذرية أو طرحها، ويحدث الشيء نفسه عند جمع وحيدات الحد، إذ تبقى المتغيرات كما هي.

مثال ١ جمع عبارات ما تحت جذورها متشابهة وطرحها

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(أ) \sqrt{2} \cdot 6 - \sqrt{2} \cdot 7 + \sqrt{2} \cdot 5$$

خاصية التوزيع

$$\sqrt{2}(6 - 7 + 5) = \sqrt{2} \cdot 6 - \sqrt{2} \cdot 7 + \sqrt{2} \cdot 5$$

بسّط

$$\sqrt{2} \cdot 6 =$$

$$(ب) \sqrt{11} \cdot 6 - \sqrt{7} \cdot 4 + \sqrt{11} \cdot 5 + \sqrt{7} \cdot 10$$

خاصية التوزيع

$$\sqrt{11}(6 - 5) + \sqrt{7}(4 + 10) = \sqrt{11} \cdot 6 - \sqrt{7} \cdot 4 + \sqrt{11} \cdot 5 + \sqrt{7} \cdot 10$$

بسّط

$$\sqrt{11} \cdot 1 - \sqrt{7} \cdot 14 =$$

تحقق من فهمك

$$(أ) \sqrt{11} \cdot 9 - \sqrt{11} \cdot 2 + \sqrt{11} \cdot 6$$

$$(أ) \sqrt{2} \cdot 4 + \sqrt{2} \cdot 5 - \sqrt{2} \cdot 3$$

$$(أ) \sqrt{7} \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot 6 - \sqrt{7} \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot 4$$

$$(أ) \sqrt{3} \cdot 11 - \sqrt{5} \cdot 6 + \sqrt{5} \cdot 14 - \sqrt{3} \cdot 15$$

بعض العبارات الجذرية لا يكون لها ما تحت الجذر نفسه، وعند تبسيطها قد يكون لها ما تحت الجذر نفسه فيمكنك جمعها أو طرحها.



مثال ٢

جمع عبارات ماتحت جذورها غير متشابه وطرحها

$$\begin{aligned} & \text{بسط: } \sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{18} \\ & \text{خاصية الضرب} \quad (\sqrt{2} \times \sqrt{6}) + (\sqrt{2} \times \sqrt{4}) + (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) = \sqrt{12} + \sqrt{8} + \sqrt{6} \\ & \text{بسط} \quad (\sqrt{2} \times 6) + (\sqrt{2} \times 4) + (\sqrt{2} \times 3) = \\ & \text{اضرب} \quad \sqrt{2} \times 6 + \sqrt{2} \times 4 + \sqrt{2} \times 3 = \\ & \text{بسط} \quad \sqrt{2} \times 20 = \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} & \text{(أ) } \sqrt{24} + \sqrt{54} \\ & \text{(ب) } \sqrt{48} - \sqrt{12} \\ & \text{(ج) } \sqrt{245} - \sqrt{20} + \sqrt{45} \\ & \text{(د) } \sqrt{96} + \sqrt{54} - \sqrt{24} \end{aligned}$$

ضرب العبارات الجذرية: يشبه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد.

وحيدات الحد	العبارات الجذرية
$(2s)(3s) = 2 \times 3 \times s \times s$	$(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$
$6s^2 =$	$6s =$

كما يمكنك أيضًا تطبيق خاصية التوزيع على العبارات الجذرية.

إرشادات للدراسة

بسط،

يجب تبسيط كل حد جذري أولاً، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

مثال ٣ ضرب العبارات الجذرية

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\begin{aligned} & \text{(أ) } \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ & \text{خاصية التجميع} \quad (\sqrt{6} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{3} = \sqrt{12} \times \sqrt{3} \\ & \text{اضرب} \quad (\sqrt{12}) \times \sqrt{3} = \\ & \text{بسط} \quad (\sqrt{36}) \times \sqrt{3} = \\ & \text{اضرب} \quad 3 \times \sqrt{3} = \\ & \text{(ب) } (\sqrt{35} + \sqrt{5}) \times \sqrt{3} \\ & \text{خاصية التوزيع} \quad (\sqrt{35} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{5} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{105} + \sqrt{15}) \\ & \text{خاصية التجميع} \quad [(\sqrt{35} \times \sqrt{3}) \times 1] + [(\sqrt{5} \times \sqrt{3}) \times 1] = \\ & \text{اضرب} \quad [(\sqrt{105}) \times 1] + [(\sqrt{15}) \times 1] = \\ & \text{بسط} \quad [(\sqrt{105}) \times 1] + [(1) \times 1] = \\ & \text{اضرب} \quad \sqrt{105} + 1 = \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} & \text{(أ) } \sqrt{105} + 1 \\ & \text{(ب) } \sqrt{105} + 1 \\ & \text{(ج) } (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6} \\ & \text{(د) } (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times \sqrt{6} \end{aligned}$$

تنبيه !

ضرب العبارات الجذرية الخطأ الشائع عند ضرب العبارات الجذرية هو جمع ما تحت جذورها لا ضربه؛ لذا تحقق من ضرب ما تحت الجذور.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

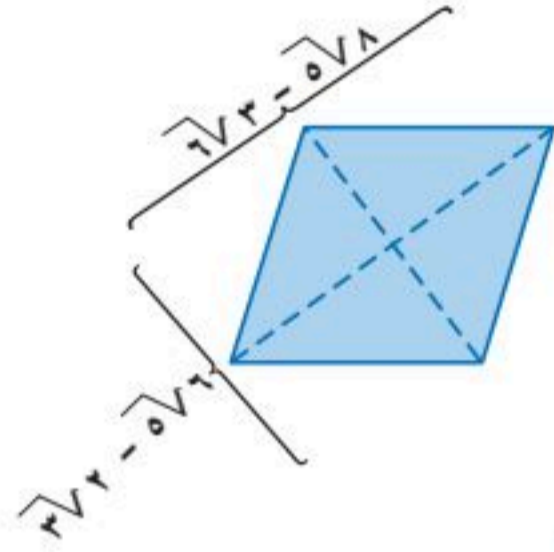
ويمكنك أيضًا ضرب عبارات جذرية يضم كل منها أكثر من حد واحد. وهو ما يشبه ضرب عبارتين جبريتين ثنائيتي الحد.

مثال ٤ من واقع الحياة ضرب عبارات جذرية

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \sqrt{3}\sqrt{4} + \sqrt{5}$$

هندسة: أوجد مساحة المستطيل المجاور بأبسط صورة.

$$\begin{aligned} m &= (\sqrt{3}\sqrt{4} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= \underbrace{(\sqrt{3}\sqrt{4})}_{\text{الحدان الأولان}} + \underbrace{(\sqrt{5})}_{\text{الحدان الأوسطان}} + \underbrace{(\sqrt{3}\sqrt{4})}_{\text{الحدان في الطرفين}} + \underbrace{(\sqrt{5})}_{\text{الحدان الأخيران}} \\ &= 9\sqrt{4} - 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{5} \\ &= 12 - 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 10\sqrt{5} \end{aligned}$$



تحقق من فهمك

(٤) هندسة: يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة $m = \frac{1}{2} \times ق١ \times ق٢$ ، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين. ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟

قراءة الرياضيات

طريقة التوزيع بالترتيب:
اضرب ثنائيي حد عن طريق إيجاد مجموع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين في الطرفين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين.

ملخص المفهوم

العمليات على العبارات الجذرية

العملية	الرموز	مثال
الجمع، $b \leq a$	$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{3}(6+4) = \sqrt{3}6 + \sqrt{3}4$ $\sqrt{3}10 =$
الطرح، $b \leq a$	$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{5}(8-12) = \sqrt{5}8 - \sqrt{5}12$ $\sqrt{5}4 =$
الضرب، $b \leq a, c \leq d$	$(\sqrt{a})(\sqrt{b}) = \sqrt{a \times b}$ ليس من الضروري تشابه ما تحت الجذرين.	$(\sqrt{7} \times \sqrt{2})(5 \times 3) = (\sqrt{7}5) \sqrt{2}3$ $\sqrt{14}15 =$

تأكد

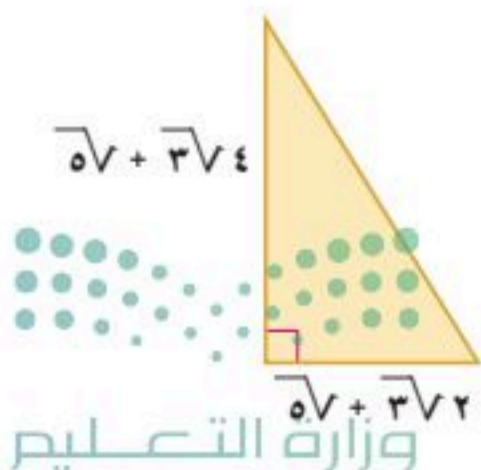
الأمثلة ١-٣

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \sqrt{5}6 + \sqrt{5}3 & (2) \quad \sqrt{7}6 - \sqrt{7} & (3) \quad \sqrt{20}2 + \sqrt{5}4 \\ (4) \quad \sqrt{3} - \sqrt{12} & (5) \quad \sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{8} & (6) \quad \sqrt{12} - \sqrt{3}2 + \sqrt{27} \\ (7) \quad (\sqrt{6}4) \sqrt{9} & (8) \quad (\sqrt{2}3 + \sqrt{7}) \sqrt{3} & (9) \quad (\sqrt{2}4 + \sqrt{2}) \sqrt{5} \end{array}$$

مثال ٤

(١٠) هندسة: يمكن إيجاد مساحة المثلث م باستعمال المعادلة: $m = \frac{1}{2} \times ق \times ع$ ، حيث (ق) طول القاعدة، (ع) ارتفاع المثلث. احسب مساحة المثلث في الشكل المجاور.



الأمثلة ١-٣

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(11) \quad \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad (12) \quad \sqrt{32} - \sqrt{50}$$

$$(13) \quad \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad (14) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$(15) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{2} \quad (16) \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3}$$

$$(17) \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \quad (18) \quad (5 - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

مثال ٤ (١٩) هندسة: أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ وطوله $\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(20) \quad \sqrt{5} - \frac{1}{5} \quad (21) \quad \sqrt{6} + \frac{2}{3} \quad (22) \quad \sqrt{8} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$(23) \quad \frac{1}{5}\sqrt{10} - \sqrt{3} + \frac{5}{4}\sqrt{8} \quad (24) \quad (\sqrt{5} - 3)^2 \quad (25) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

(٢٦) لعبة الأفعوانية: تعبر المعادلة $\sqrt{64 - 2x} = 6$ عن سرعة الانطلاق (ع) بالقدم/ثانية في أدنى نقطة لها عند هبوطها من ارتفاع عمودي (ل) بالأقدام وبسرعة (ع).

(أ) كم تكون سرعة الأفعوانية عند قمة ارتفاعها ٢٢٥ قدمًا كي تصل سرعتها إلى ١٢٠ قدمًا/ثانية في أدنى نقطة لها؟

(ب) فسّر لماذا لا تكافئ المعادلة $\sqrt{8 - x} = 6$ المعادلة المعطاة؟

(٢٧) استثمار: استثمر عامر مبلغ ٢٢٥٠٠ ريال في التجارة، فأصبح المبلغ ٢٧٠٠٠ ريال بعد سنتين.

يمكنك استعمال المعادلة $\sqrt{1 - \frac{2x}{c}} = r$ لإيجاد معدّل الربح السنوي (ر)، حيث تمثل (ع) المبلغ الأصلي، و (٢٤) المبلغ بعد سنتين. أوجد معدّل الربح السنوي للمبلغ الذي استثمره عامر؟

(٢٨) كهرباء: تستعمل المعادلة $\frac{\sqrt{P}}{M} = I$ لحساب شدة التيار الكهربائي بالأمبير (ت)، حيث (قد) قدرة

الجهاز بالواط، (م) المقاومة بالأوم. ما شدة التيار الكهربائي في فرن الميكروويف إذا كانت قوة التيار

٨٥٠ واط، ومقاومته ٥ أوم؟ اكتب شدة التيار في أبسط صيغة جذرية، ثم قدر قيمته إلى أقرب جزء من

عشرة.



الربط مع الحياة

لعبة الأفعوانية نموذج مصغر لسكة حديدية ملتوية ترتفع عن الأرض، وتعد من الألعاب الشهيرة والرئيسية في مدن الألعاب الكبيرة، ويقبل عليها الكثيرون وخصوصًا الشباب للتسلية والترفيه، ولما يميزها من المتعة والإثارة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٩) تحدّد: حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو غير صحيحة، وأعط مثالاً أو مضافاً:

$$س + \sqrt{ص} < \sqrt{ص} + ٢ \text{ عندما } ص < ٠, ص < ٠$$



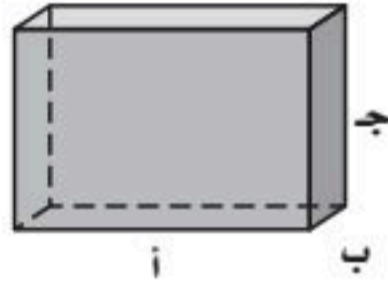
(٣٠) **تبرير:** بين أنه إذا كانت أ، ب، ج، د، أعدادًا نسبية، فإن ناتج ضرب: $\overline{أب} + \overline{جأف}$ ، $\overline{أب} - \overline{جأف}$ ، لا يحوي جذورًا. فسّر إجابتك.

(٣١) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جمع جذرين ما تحت كل منهما مختلف. وفسّر كيف يمكنك جمع هذين الجذرين.

(٣٢) **اكتب:** صف بالخطوات كيف تضرب عبارتين جذريتين يتكون كل منهما من جذرين، واكتب مثالاً يوضح ذلك.

تدريب على اختبار

(٣٥) **هندسة:** أي عبارة مما يأتي تمثل مجموع أطوال الاثني عشر حرفًا للمنشور الرباعي (متوازي المستطيلات) أذناه؟



(أ) $2(أ + ب + ج)$ (ب) $3(أ + ب + ج)$

(ج) $4(أ + ب + ج)$ (د) $12(أ + ب + ج)$

(٣٣) **إجابة قصيرة:** إذا كان عدد سكان مدينة ١٣٠٠٠٠ نسمة ويتزايدون بمقدار ٢٥٠٠ شخص في السنة، فإنه يمكن التعبير عن عدد سكانها بعد (س) سنة من ذلك بالمعادلة: $ع = ١٣٠٠٠٠ + ٢٥٠٠س$. بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ١٤٥٠٠٠؟

(٣٤) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $٨(٣-ص) + ٥(٣-ص)$ ؟

(أ) $٣٩ - ص$ (ب) $٤٠(٣ - ص)$

(ج) $١٣(٣ - ص)$ (د) $١٣(٦ - ٢ص)$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

(٣٨) $\sqrt{٦٠}$

(٣٧) $\sqrt{٢٤}$

(٣٦) $\sqrt{١٨}$

(٤١) $\sqrt[٥]{٦٣ج٣د٤ف٥}$

(٤٠) $\sqrt[٧]{١٦٩ص٤}$

(٣٩) $\sqrt[٥]{١٥٠أ٣ب٥}$

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

(٤٤) $٧٢ + ب - ٢ - ١٧ب$

(٤٣) $٣٠ + ص + ٢ - ١٣ص$

(٤٢) $٢٧ + س + ٢ - ١٢س$

(٤٧) $٩ + و + ٦ - ٧٢و$

(٤٦) $٤٢ - ص - ٢ - ص$

(٤٥) $٧ - س + ٢ - ٦س$

استعد للدرس اللاحق

حلّل كل معادلة فيما يأتي مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

(٥٠) $٩,٦ = ٤ + م,٣$

(٤٩) $٨٤,١ = ٣٣,٧ - ك,٦$

(٤٨) $٠,٨ = ١,٢ - ج,٤$



(٥٣) $٨ = ت,٥ - ٦ + ٣,٦$

(٥٢) $١٣ = \frac{٥-}{٧-} - ٤$

(٥١) $٦ = \frac{ن}{٥} - ١٠$

المعادلات الجذرية

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

طول غاطس القارب الشراعي هو طول الخط الذي يصنعه مع حافة الماء عندما يكون حاملاً أقصى حمولته. ويمكن تقدير أقصى سرعة للقارب بالكيلومتر/ساعة باستعمال المعادلة: $ع = ٥\sqrt{٤,٥}$ ، حيث (ل) تمثل طول غاطس القارب بالأمتار.

فيما سبق

درست جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها.

والآن

- أحل معادلات جذرية.
- أحل معادلات جذرية تتضمن حلولاً دخيلة.

المضردات

المعادلات الجذرية
الحلول الدخيلة

المعادلات الجذرية: المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر، مثل $ع = ٥\sqrt{٤,٥}$ تُسمى معادلات جذرية. ولحل مثل هذه المعادلات اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة أولاً، ثم ربّع طرفي المعادلة؛ للتخلص من الجذر.

أضف إلى

مطويتك

خاصية تربيع طرفي المساواة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا ربّعت طرفي معادلة صحيحة، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة.
الرموز: إذا كانت $أ = ب$ ، فإن: $أ^٢ = ب^٢$.
مثال: إذا كانت $\sqrt{س} = ٤$ ، فإن $(\sqrt{س})^٢ = ٤^٢$

مثال ١ من واقع الحياة متغير تحت الجذر

إبحار: يبحر إدريس وموسى في قارب شراعي، سرعته ٦٥، ١٦ كلم/ساعة. أوجد طول الغاطس إلى أقرب عُشر من المتر. بالرجوع إلى فقرة لماذا، حل السؤال التالي:

افهم: تعلم سرعة القارب في رحلته والتي لها علاقة بطول غاطس القارب.

خطّط: يسير القارب بسرعة ٦٥، ١٦ كم/ساعة ومعادلة السرعة هي: $ع = ٥\sqrt{٤,٥}$.

حل: معادلة سرعة القارب $ع = ٥\sqrt{٤,٥}$

عوّض $ع = ١٦,٦٥$ $٥\sqrt{٤,٥} = ١٦,٦٥$

اقسم على ٥، $\frac{٥\sqrt{٤,٥}}{٥} = \frac{١٦,٦٥}{٥}$

بسّط $\sqrt{٤,٥} = ٣,٧$

ربّع طرفي المعادلة $(\sqrt{٤,٥})^٢ = (٣,٧)^٢$

بسّط $٤,٥ = ١٣,٦٩$

طول الغاطس يساوي ١٣,٧ متراً تقريباً.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

معادلة سرعة القارب $ع = ٥\sqrt{٤,٥}$

عوّض $ع = ١٦,٦٥$ $٥\sqrt{٤,٥} \stackrel{?}{=} ١٦,٦٥$

اضرب $\checkmark ١٦,٦٥ \approx ١٦,٦٥$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تحقق من فهمك ✓

(١) **قيادة:** تمثل المعادلة $\sqrt{3x+21}$ نق السرعة القصوى بالكيلومتر/ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحنٍ غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صُمم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥ كلم/ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟

لحل المعادلات الجذرية: اجعل الجذر في طرف من المعادلة أولاً، ثم رتب طرفيها.

مثال ٢ حل المعادلة الجذرية

حل المعادلة: $\sqrt{x+5} + 7 = 12$.

المعادلة الأصلية	$12 = 7 + \sqrt{x+5}$
اطرح ٧ من الطرفين	$5 = \sqrt{x+5}$
رتب الطرفين، وبسط	$25 = (\sqrt{x+5})^2$
بسط	$25 = x + 5$
اطرح ٥ من الطرفين	$20 = x$

تحقق من فهمك ✓

(١٢) $\sqrt{x-3} - 2 = 4$ (ب) $14 = \sqrt{x-1} + 4$

تنبيه !

ترتيب الطرفين
تذكر أنه عند ترتيب طرفي المعادلة، يجب ترتيب كل طرف منها وإن كان يتكون من أكثر من حد واحد.

حلول دخيلة: ينتج عن ترتيب طرفي المعادلة أحياناً حل لا يحقق المعادلة الأصلية. وهذه الحلول تُسمى **حلولاً دخيلة**؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية.

مثال ٣ حل المعادلة التي تحتوي متغيراً في كلا طرفيها

حل المعادلة: $\sqrt{x+1} = 1 - k$. وتحقق من صحة الحل.

المعادلة الأصلية	$1 - k = \sqrt{x+1}$	المعادلة الأصلية	$1 - k = \sqrt{x+1}$
رتب الطرفين	$2(1 - k) = (\sqrt{x+1})^2$	عوض $k = 0$	$1 - 0 = \sqrt{x+1}$
بسط	$1 + k^2 = 1 + k$	بسط	$1 = \sqrt{x+1}$
اطرح k ، ١ من الطرفين	$k^2 - k = 0$	خطأ	$1 = x + 1$
حل	$k(k - 1) = 0$		
خاصية الضرب الصفري	$0 = k$ أو $0 = k - 1$		
حل	$3 = k$ أو $0 = k$		
المعادلة الأصلية	$1 - k = \sqrt{x+1}$	المعادلة الأصلية	$1 - k = \sqrt{x+1}$
عوض $k = 3$	$1 - 3 = \sqrt{x+1}$	عوض $k = 0$	$1 - 0 = \sqrt{x+1}$
بسط	$2 = \sqrt{x+1}$	بسط	$1 = \sqrt{x+1}$
صحيح	$2 = 2$ ✓	خطأ	$1 = 1$ ✗

وبما أن الصفر لا يحقق المعادلة الأصلية؛ لذا فإن ٣ هو الحل الوحيد.

تحقق من فهمك ✓

(١٣) $\sqrt{5+t} = 3+t$ (ب) $3 - s = \sqrt{1-s}$



مثال ١ (١) هندسة: ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي $m = 4\pi$ ؟

المثالان ٢، ٣ حُل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$\begin{aligned} (٢) \quad 21 &= 1 + \sqrt{10} \sqrt{2} & (٣) \quad 7 &= 3 + \sqrt{2+r} \sqrt{7} & (٤) \quad 6 &= \sqrt{3-j} + 5 \\ (٥) \quad 5 - s &= \sqrt{5-3s} & (٦) \quad n &= \sqrt{3+2n} & (٧) \quad a &= 4 + \sqrt{2-a} \end{aligned}$$

تدرب وحل المسائل

مثال ١ (٨) رياضة: يمكن استعمال الدالة $v = \sqrt{\frac{9.8L}{v}}$ ، لتقريب أقصى سرعة يمكن أن يركض بها شخص، حيث (ع) السرعة بالمتري/ ثانية، (ل) طول ساق الشخص بالأمتار.

- (أ) ما أقصى سرعة يركض بها شخص طول ساقه ٤,٠ متر إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟
 (ب) ما طول الساق لشخص سرعته القصوى ٧,٢ م/ث إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟
 (ج) هل تزيد السرعة القصوى أم تنقص بزيادة طول الساق؟

المثالان ٢، ٣ حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$\begin{aligned} (٩) \quad 21 &= 11 + \sqrt{1} \sqrt{2} & (١٠) \quad 3\sqrt{3} &= \sqrt{7+k} & (١١) \quad 3\sqrt{3} &= \sqrt{7+k} \\ (١٢) \quad \sqrt{12} &= \sqrt{12} - \sqrt{v} & (١٣) \quad 3 - r &= \sqrt{3+r} & (١٤) \quad 14 &= 4 + \sqrt{3-a} \\ (١٥) \quad 5 + s &= \sqrt{15+9s+2s^2} & (١٦) \quad 0 &= 3 - \sqrt{\frac{5k}{4}} & (١٧) \quad 2s &= \sqrt{9-2s} \end{aligned}$$

(١٨) بندول: يُطلق على الزمن (ن) بالثواني الذي يستغرقه بندول ساعة لعمل دورة كاملة الزمن الدوري. ويُعبّر عنه بالمعادلة: $n = 2\sqrt{\frac{L}{3.2}}$ ، حيث (ل) طول البندول بالأقدام.

- (أ) ما طول بندول ساعة زمنه الدوري ٨ ثوانٍ؟ قرب إلى أقرب قدم.
 (ب) هل زيادة طول البندول تزيد السرعة أم تنقصها؟ فسّر إجابتك.

(١٩) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في حل المعادلة $\sqrt{7-2s} = 7-s$ طرائق متنوعة للحل.

(أ) بيانياً: افتح شاشة جديدة، ثم أدخل الطرف الأيمن من المعادلة على صورة $\sqrt{7-2s}$ ، وأدخل الطرف الأيسر على صورة $7-s$ ، ثم اضغط مفتاح **2:Add Graphs**.

(ب) بيانياً: مثل ما يظهر على الشاشة.

(ج) تحليلياً: استعمل مفتاح المقطع من قائمة **3:Intersection Point(s)**، لإيجاد نقطة التقاطع.

(د) تحليلياً: حُل المعادلة الجذرية جبرياً، وكيف يمكن مقارنة حلك بالحل الناتج بيانياً؟



- (٢٠) **تغليظ:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتيمترًا مكعبًا. تستعمل المعادلة $\sqrt{\frac{ح}{طع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (ح) حجم العلبة، و (ع) ارتفاعها.
- (أ) إذا كان نصف قطر العلبة ٥ سم، فأوجد ارتفاعها إلى أقرب جزء من مئة.
- (ب) إذا كان ارتفاع العلبة ١٠ سم، فأوجد نصف قطرها إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٢١) **تبرير:** بين الاختلاف في حل المعادلتين الآتيتين: $\sqrt{س+١} = ٥$ ، $\sqrt{س+١} = ٥$.
- (٢٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جذرية تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها، ثم حل المعادلة.
- (٢٣) **تبرير:** هل المعادلة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.
- $$\sqrt{٢(٢-س)} = ٢-س$$
- (٢٤) **تحذُّ:** حل المعادلة: $\sqrt{س+٩} = \sqrt{س+٣} + \sqrt{س}$
- (٢٥) **اكتب:** بعض القواعد العامة المتعلقة بحل المعادلات الجذرية، موضِّحًا هذه القواعد من خلال حل معادلات جذرية.

تدريب على اختبار

- (٢٦) ما حل المعادلة:
- $$\sqrt{س+٣} - ١ = س - ٤$$
- (أ) ٦، ١ (ب) ١ (ج) -١، -٦ (د) ٦
- (٢٧) أي العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{\frac{٣٦}{٢٧}}$ ؟
- (أ) $\sqrt{\frac{٣}{٣}}$ (ب) $\sqrt{\frac{٣٦}{٣}}$ (ج) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$

مراجعة تراكمية

- بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)
- (٢٨) $\sqrt{٢٧} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٢٧ \times ٣}$
- (٢٩) $\sqrt{\frac{٢٧}{٢١}}$
- (٣٠) $\sqrt{\frac{٥٠}{٤٠}}$
- (٣١) **فيزياء:** قُذف جسم إلى الأعلى من مستوى الأرض حسب المعادلة $٦٩ن - ١٦ن^٢$ ، حيث (ع) تمثّل ارتفاعه بالأقدام، بعد (ن) من الثواني. أوجد قيم ن عندما يكون ارتفاع الجسم ٩٦ قدمًا. (الدرس ٨-٤)
- حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب «أولية». (مهارة سابقة)
- (٣٢) $٥ + ٧س + ٢س^٢$ (٣٣) $٦ب + ٥ + ٦ب^٢$ (٣٤) $٩ + ١٩ك - ٢ك^٢$
- حدّد العبارات الوحيدة الحد فيما يأتي، واكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك: (مهارة سابقة)
- (٣٥) ١٢ (٣٦) $٤س^٣$ (٣٧) أ - ب

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج كل ممّا يأتي:



وزارة التعليم

الدرس ٩-٣: المعادلات الجذرية ١٥٧
2025 - 1447

(٤٠) ٤٠
(٤٣) $(١٠ص)^٢$

(٣٩) ٦١٠
(٤٢) $(\frac{٣ل}{٩})^٢$

(٣٨) ٢٩
(٤١) $(٨ف)^٢$



لماذا؟

تُقاس أجهزة التلفاز بطول قطر شاشاتها، حيث يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قياس القطر إذا كان ارتفاع الشاشة وعرضها معلومين. **نظرية فيثاغورس:** يُسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم **وترًا**، وهو أطول الأضلاع في المثلث ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين **ساقًا**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحدّد إذا كان المثلث المُعطى قائم الزاوية أم لا.

المفردات

الوتر

الساق

المعكوس

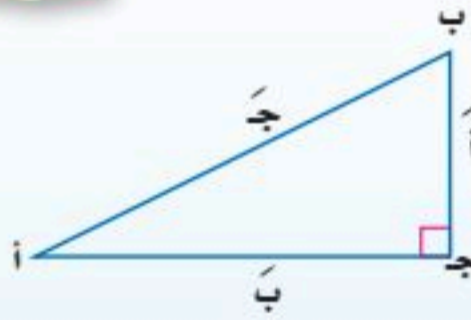
ثلاثية فيثاغورس

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

نظرية فيثاغورس



التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

$$\text{الرموز: } ج^2 = أ^2 + ب^2$$

مثال ١

إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

نظرية فيثاغورس

$$أ = ١٠، ب = ٢٤$$

ربع

بسط

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$٦٧٦ = ٢(٢٦٦)$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

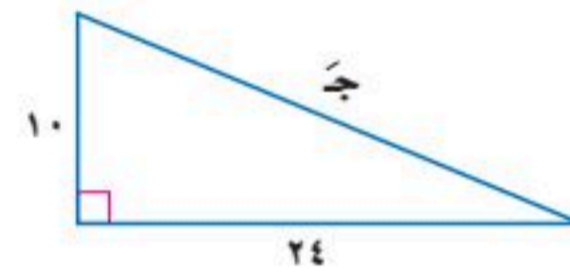
$$ج^2 = ١٠^2 + ٢٤^2$$

$$ج^2 = ١٠٠ + ٥٧٦$$

$$ج^2 = ٦٧٦$$

$$ج = \sqrt{٦٧٦}$$

$$ج = ٢٦$$



بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا؛ لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٦ وحدة.

نظرية فيثاغورس

$$ج = ١٥، أ = ٧$$

ربع

اطرح ٤٩ من كلا الطرفين

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{١٧٦٧}$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

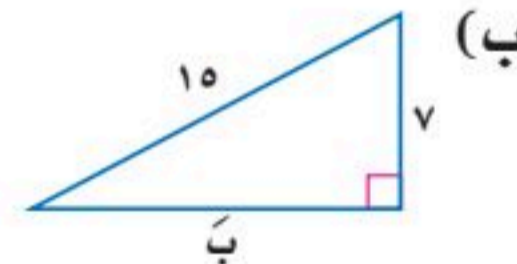
$$١٥^2 = ب^2 + ٧^2$$

$$٢٢٥ = ب^2 + ٤٩$$

$$ب^2 = ١٧٦$$

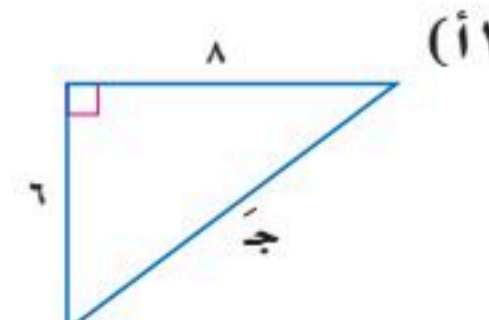
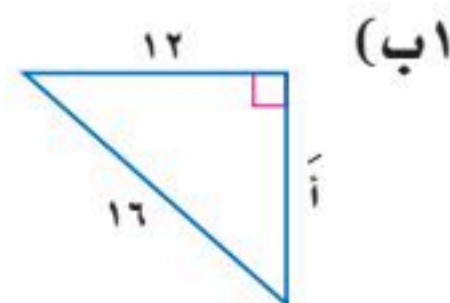
$$ب = \sqrt{١٧٦٧}$$

$$ب \approx ١٣, ٢٧$$



فيكون الطول المجهول هو ٢٧, ١٣ وحدة تقريبًا.

تحقق من فهمك



إرشادات للدراسة

في المثلث أ ب ج يُرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أ، والمقابل للزاوية ب بالرمز ب، والمقابل للزاوية ج بالرمز ج.



مثال ٢ من واقع الحياة إيجاد طول ضلع في مثلث قائم



إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

نظرية فيثاغورس

$$٢٣ + ٢ع = ٢٦$$

ربّع

$$٩ + ٢ع = ٣٦$$

اطرح ٩ من كلا الطرفين

$$٢ع = ٢٧$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$ع \approx ٥,٢ \pm$$

استعمل القيمة الموجبة

$$ع \approx ٥,٢$$

ارتفاع الشراع ٥,٢ أمتار تقريبًا.

تحقق من فهمك

(٢) لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩ م، وطول أقصر ضلع فيه ٤ م. فأوجد ارتفاع الشراع.

المثلث القائم الزاوية: إذا استُبدل الفرض والنتيجة أحدهما مكان الآخر في العبارة الشرطية (إذا كان فإن)، فإن نتيجة ذلك سيكون **معكوس** العبارة الأصلية. ويمكن استعمال معكوس نظرية فيثاغورس لتحديد إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

الزورق النهري زورق شراعي يتوسطه صار عمودي على سطحه مثبت تقريبًا في الثلث الأول من مقدمته. ويتصل بهذا الصاري أفقيًا عمود آخر يسمى البومة يكون قاعدة للشراع المثلث على الصاري. وللقارب شراعان: أمامي؛ وهو الصغير، وخلفي وهو الشراع الرئيسي.

الربط مع الحياة

أضف إلى

مطوبيتك

مفهوم أساسي معكوس نظرية فيثاغورس

إذا كانت الأطوال أ، ب، جـ لأضلاع مثلث تحقق المعادلة $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ ، فإن المثلث قائم الزاوية. وإذا كانت $جـ^2 \neq أ^2 + ب^2$ ، لا يكون المثلث قائم الزاوية.

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ ، حيث جـ أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك "٣، ٤، ٥"، "٥، ١٢، ١٣". وتحقق مضاعفات ثلاثيات فيثاغورس أيضًا معكوس نظرية فيثاغورس؛ لذا فإن "٦، ٨، ١٠" أيضًا من ثلاثيات فيثاغورس.

مثال ٣ التحقق من أن المثلث قائم الزاوية

حدّد إذا كانت الأطوال "٩، ١٢، ١٦" يمكن أن تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا. بما أن طول الضلع الأكبر ١٦، فإن جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢.

نظرية فيثاغورس

$$جـ^2 = أ^2 + ب^2$$

عوض جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢

$$١٦^2 \stackrel{?}{=} ٩^2 + ١٢^2$$

ربّع

$$١٤٤ + ٨١ \stackrel{?}{=} ٢٥٦$$

اجمع

$$٢٢٥ \neq ٢٥٦$$

بما أن $جـ^2 \neq أ^2 + ب^2$ ، فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

(ب٣) ١٨، ١٢، ٦

(أ٣) ٥٠، ٤٠، ٣٠

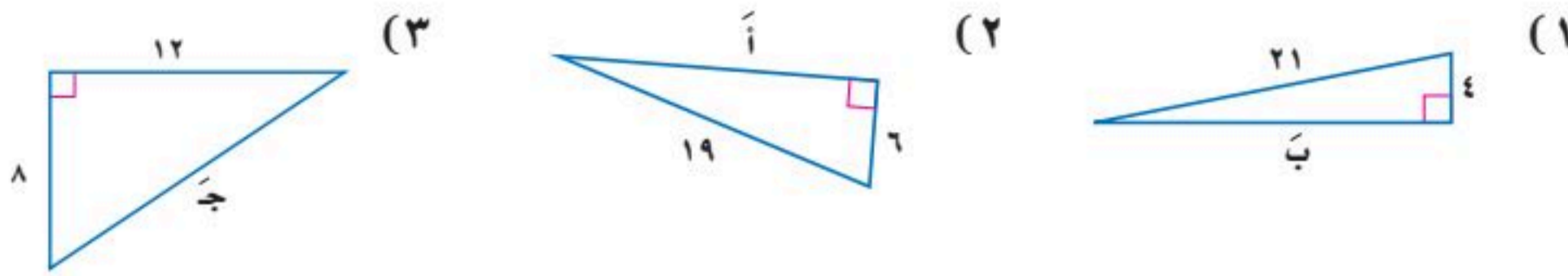


وزارة التعليم

الدرس ٩-٤: نظرية فيثاغورس ١٥٩
2025 - 1447

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.

مثال ١



مثال ٢

(٤) كرة قدم: يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.



(أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥ م، وعرضه ٧٥ م، فكم طوله؟

(ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرّر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠ م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي

يقف على مسافة ٧٢ م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟

مثال ٣

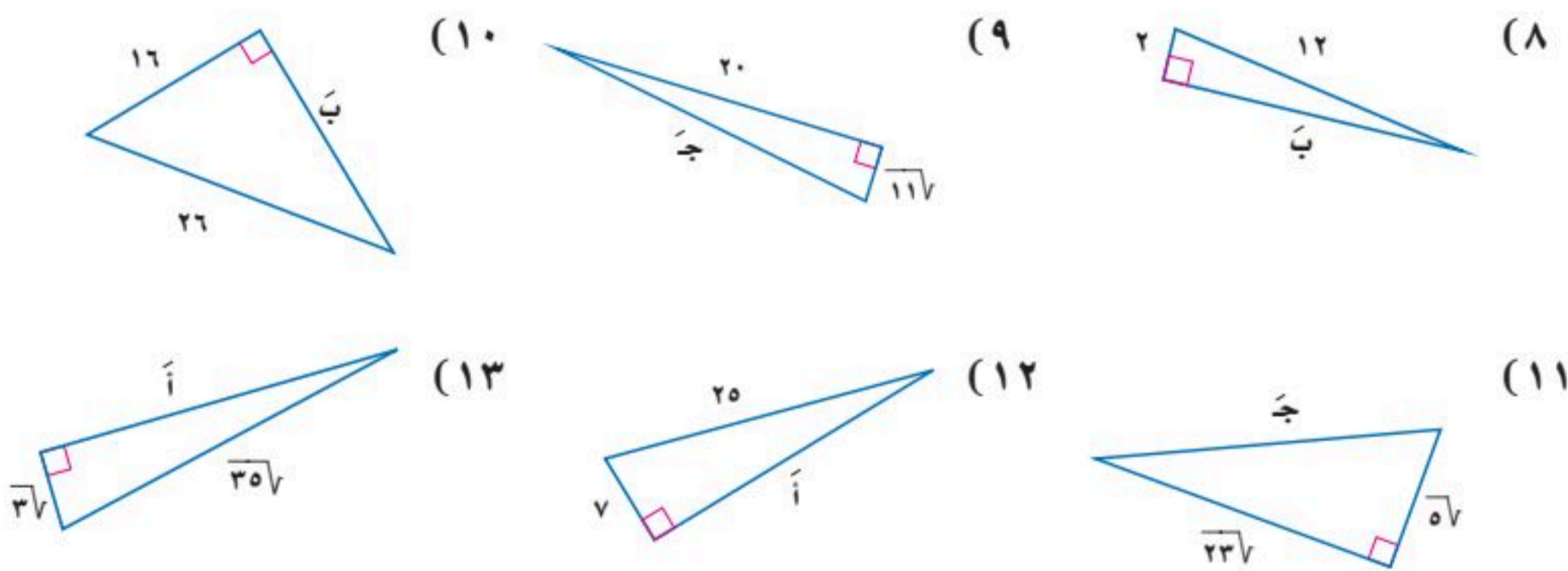
حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

- (٥) ١٦، ١٢، ٨ (٦) ٢٥، ٢٤، ٧ (٧) ٤٥، ٢٥، ١٥

تدرب وحل المسائل

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر:

مثال ١



مثال ٢

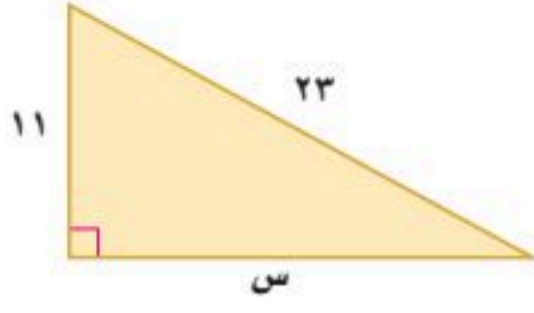
(١٤) تلفاز: أراد مهند شراء طاولة مستطيلة يضع عليها تلفازًا، قطر قاعدته ٢٧ بوصة، فإذا كان بعدا الطاولة ٢٠ بوصة و٢٦ بوصة. فهل تناسب الطاولة التلفاز؟ فسّر إجابتك.

مثال ٣

حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، ثم حدّد إذا كانت تشكّل ثلاثية فيثاغورس:

- (١٥) ٤١، ٤٠، ٩ (١٦) ٤١، ١٠، ٢، ٣ (١٧) ١٤، ٧، ٥، ٢

- (١٨) ٣٢، ٥، ٣١، ٥، ٨ (١٩) ٩٧، ٢، ٦، ٦٥ (٢٠) ٩٨، ٣٣، ١٧

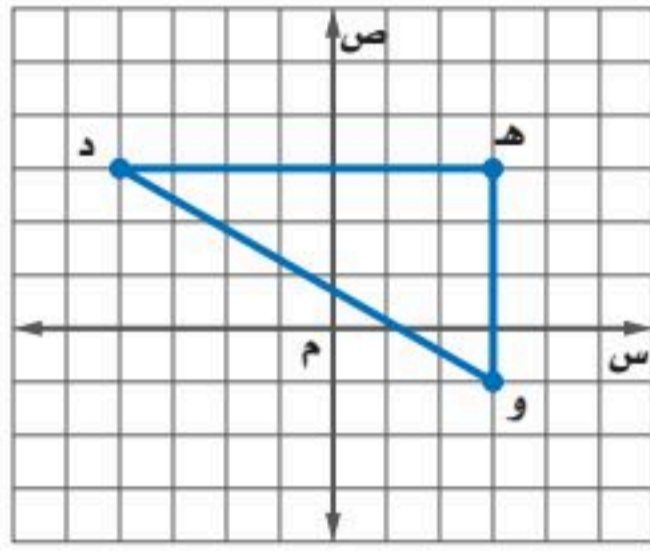


(٢١) هندسة: أجب عن الأسئلة الآتية اعتمادًا على المثلث المجاور:

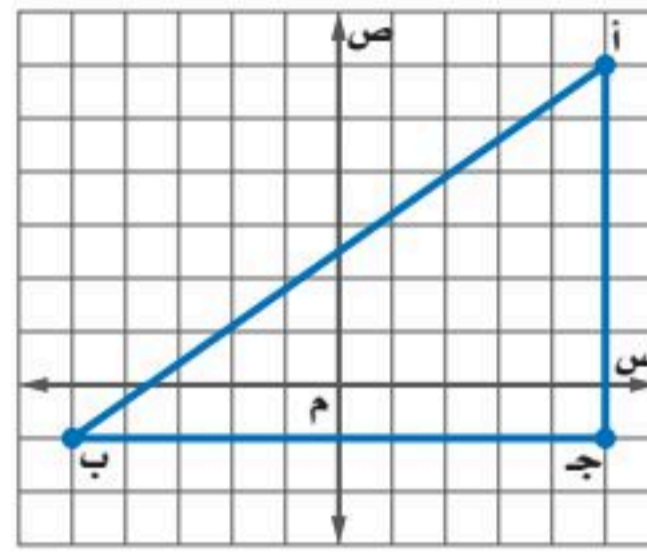
(أ) ما قيمة س؟

(ب) ما مساحة المثلث؟

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

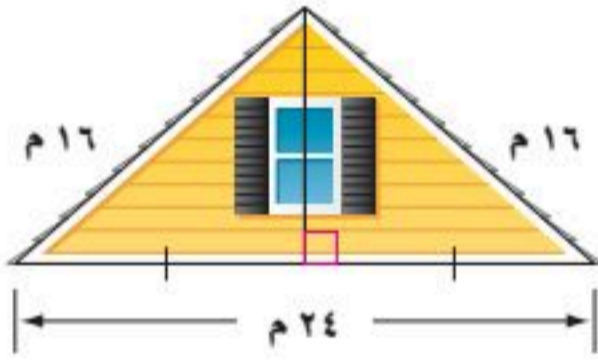


(٢٣)

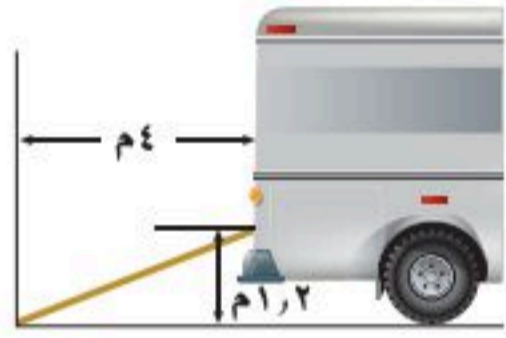


(٢٢)

(٢٤) هندسة: أوجد طول قطر مكعب طول ضلعه ٥ سم.



(٢٥) منزل: يمثل الشكل المجاور الواجهة العلوية لمنزل عرضها ٢٤ مترًا، وطولا الضلعين المائلين لها ١٦ مترًا. أوجد ارتفاع الواجهة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.



(٢٦) شاحنات: صنع أحمد منحدرًا خشبيًا لسحب مجموعة صناديق على عربة ذات عجلات من مخزنه إلى الشاحنة كما في الشكل. فما طول المنحدر؟

(٢٧) هندسة: أوجد طول قطر مربع مساحته ٢٤٢ سم^٢.

إذا كان جـ يمثل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضروريًا:

(٢٨) أ = س، ب = س + ٤١، ج = ٨٥ (٢٩) أ = ١٢، ب = س - ٢، ج = س

(٣٠) أ = س - ٤٧، ب = س، ج = س + ٢ (٣١) أ = س - ٣٢، ب = س - ١، ج = س



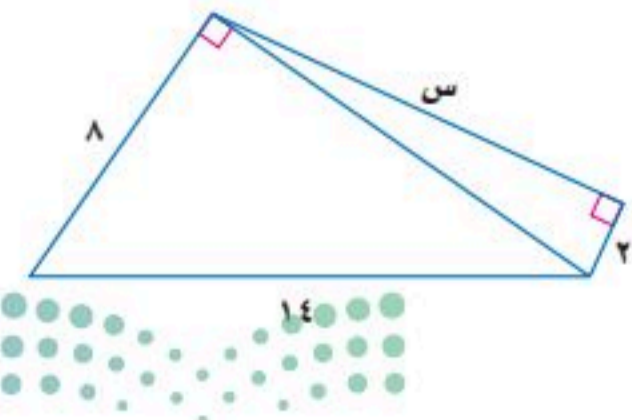
الربط مع الحياة

يقع باب الكعبة المشرفة في الجهة الشرقية منها، والباب الحالي هدية من الملك خالد بن عبدالعزيز، وصنع من ٣٠٠ كيلوجرامًا من الذهب النقي عيار ٩٩,٩٩

(٣٢) هندسة: طول أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية أقل بمقدار ٨ سم عن طول الضلع الآخر، وطول وتره ٣٠ سم. أوجد طول كل من ضلعيه.

(٣٣) الكعبة المشرفة: باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢,٣ م، ٧,١ م. فكم طول قطره؟

مسائل مهارات التفكير العليا



(٣٤) تحدّ: أوجد قيمة س في الشكل المجاور؟

(٣٥) تبرير: أعطِ مثالًا مضادًا للعبارة الآتية:

"تساوي مساحتا مثلثين قائمي الزاوية إذا تساوى طول وتريهما".

(٣٦) **اكتشف الخطأ:** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

حازم	حسام
$٣٦^2 \neq ٧٧^2 + ٨٥^2$	$٣٦^2 \neq ٧٧^2 + ٨٥^2$
$٥٩٢٩ \neq ٧٧٢٥ + ١٢٩٦$	$٧٢٢٥ \neq ٥٩٢٩ + ١٢٩٦$
$٥٩٢٩ \neq ٩٠٢١$	$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$
لا	نعم

(٣٧) **اكتب:** وضح كيف تحدد إن كانت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تشكل مثلثاً قائم الزاوية.

تدريب على اختبار

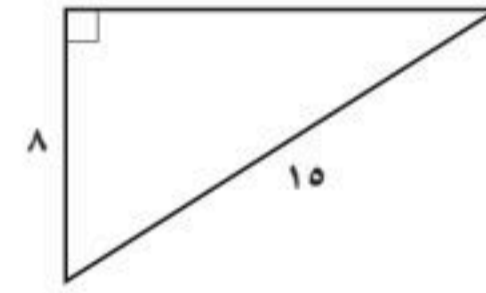
(٣٩) ما حل المعادلة: $س + ١ = \sqrt{س + ١}$ ؟

(أ) ٠, ٣ (ب) صفر

(ج) ٣ (د) ليس لها حل

(٤٠) **إجابة قصيرة:** يتقاضى سبّاك ٤٠ ريالاً عن الساعة الأولى إذا عمل خارج محله، بالإضافة إلى مبلغ ٨ ريالات عن كل $\frac{1}{٣}$ ساعة إضافية. فإذا عمل السبّاك ٤ ساعات، فكم ريالاً يتقاضى؟

(٣٨) **هندسة:** أوجد الطول المجهول في الشكل أدناه.



(أ) $\sqrt{17}$

(ب) ١٧

(ج) ١٧

(د) $\sqrt{17}$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

$$(٤٣) \sqrt{س} - ٣ = \sqrt{١٥ - س}$$

$$(٤٢) ٤ = ٢ + \sqrt{س + ١}$$

$$(٤١) ١٠ = \sqrt{١٠س}$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

$$(٤٦) \sqrt{١٢} + \sqrt{٣} + \sqrt{٤}$$

$$(٤٥) \sqrt{٩} + \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$$

$$(٤٤) \sqrt{٤} - \sqrt{١٨}$$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٤٩) (٨ - ص)(٤ + ص)$$

$$(٤٨) (٩ - س)(٤ - س)$$

$$(٤٧) (٢ + ب)(٨ + ب)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حلّ كلاً من التناسبات الآتية:

$$(٥١) \frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{س}$$

$$(٥٠) \frac{١٢}{٣} = \frac{س}{٥}$$

$$(٥٣) \frac{١٢}{٨ + س} = \frac{٣}{٥}$$

$$(٥٢) \frac{١٠}{س} = \frac{٥}{٤}$$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

$$(١٥) \sqrt{5s} - 1 = 4$$

$$(١٦) \sqrt{b-2} = 6$$

$$(١٧) \sqrt{15s} - 1 = 4$$

$$(١٨) \sqrt{3s^2 - 32} = s$$

$$(١٩) \sqrt{2s-1} = 7$$

$$(٢٠) \sqrt{s+1} + 2 = 4$$

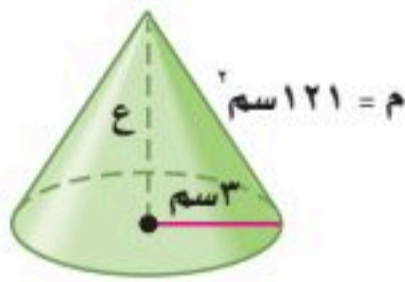
(٢١) هندسة: قانون المساحة الجانبية لمخروط، يعطى بالصيغة

$$M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

حيث r نصف قطر القاعدة،

h ارتفاع المخروط، استخدم هذه الصيغة لحساب ارتفاع

المخروط أدناه. (الدرس ٩-٣)



(٢٢) اختيار من متعدد: أي الأطوال التالية تشكل أطوال أضلاع

مثلث قائم الزاوية؟ (الدرس ٩-٤)

(أ) ١٥، ١٢، ٩

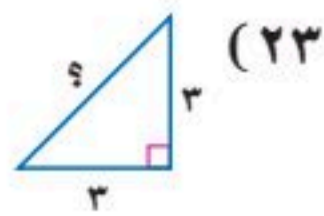
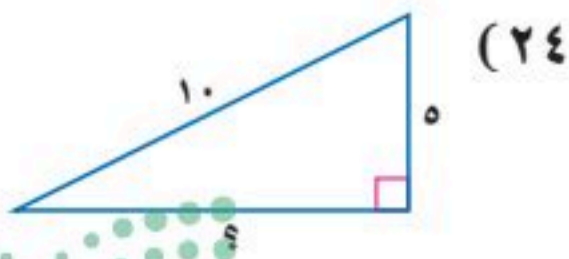
(ب) ١٢، ٦، ٦

(ج) ٨، ٤، ٣

(د) ٣، ٥، ٣

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل

إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ٩-٤)



بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

$$(١) 2\sqrt{5}$$

$$(٢) \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$$

$$(٣) \sqrt{25s^2}$$

$$(٤) \frac{3}{\sqrt{5}+1}$$

$$(٥) \frac{1}{\sqrt{5}-5}$$

(٦) اختيار من متعدد: أي القيم التالية تساوي $\sqrt{\frac{16}{33}}$ ؟

(الدرس ٩-١)

(ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(د) ٤

(أ) $\frac{1}{2}$

(ب) ٢

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

$$(٧) \sqrt{20} + \sqrt{3}$$

$$(٨) \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$(٩) 5\sqrt{4} + 2\sqrt{6}$$

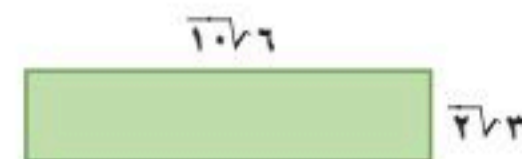
$$(١٠) \sqrt{8} - 2\sqrt{2}$$

$$(١١) (\sqrt{2})^3 \sqrt{4}$$

$$(١٢) (\sqrt{2})^2 \sqrt{3}$$

$$(١٣) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

(١٤) هندسة: أوجد مساحة المستطيل أدناه. (الدرس ٩-٢)

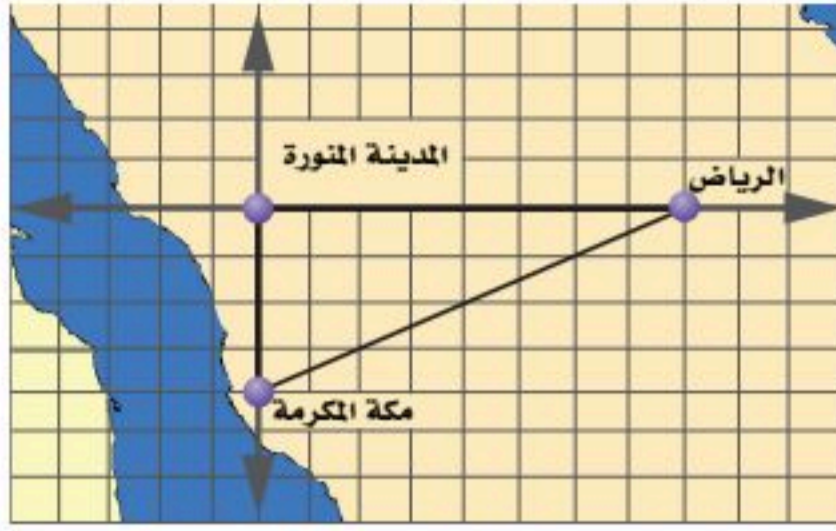


المسافة بين نقطتين

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



تستعمل طائرة الإنقاذ المروحية نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) لحساب المسافة المباشرة بين موقعين. وتستطيع التحليق لمسافة ٩٠٠ كيلومتر قبل إعادة تزويدها بالوقود. إذا كانت مهمة الطائرة نقل شخص من مكة المكرمة إلى الرياض، وإذا افترضت أن المدينة المنورة هي نقطة الأصل، ومكة المكرمة عند النقطة (٠، ٨٠٠)، والرياض عند النقطة (٤٠٠، ٠)، فهل يمكن للطائرة إكمال المهمة دون التزود بالوقود في أثناء الطريق؟

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

قانون المسافة بين نقطتين: يستعمل نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) قانون المسافة بين نقطتين الذي يعتمد على نظرية فيثاغورس.

المضردات

قانون المسافة بين نقطتين

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي المسافة بين نقطتين

التعبير اللفظي: المسافة بين نقطتين إحداثياتها $(س_١، ص_١)$ ، $(س_٢، ص_٢)$ يُعبر عنها بالقانون:

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

النموذج:

يمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

مثال ١

المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين النقطتين $(٣، ٥)$ ، $(٢، ١)$.

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

$$= \sqrt{(٣ - ٢)^2 + (٥ - ١)^2} \quad (س_١، ص_١) = (٣، ٥)، (س_٢، ص_٢) = (٢، ١)$$

$$= \sqrt{(١)^2 + (٤)^2} \quad \text{بسط}$$

$$= \sqrt{١ + ١٦} \quad \text{ربّع}$$

$$= \sqrt{١٧} = ٤، ٦ \quad \text{بسط}$$

تحقق من فهمك

(١) $(٢، ٤)$ ، $(٣، ١)$

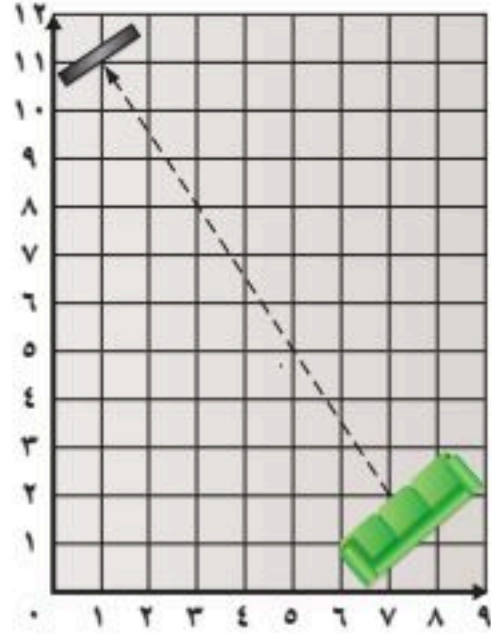
(٢) $(٧، ٢)$ ، $(٥، ٨)$



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

مثال ٢ من واقع الحياة استعمال قانون المسافة بين النقطتين



ترفيه: يمتلك صالح مسرحًا منزليًا. ويوضع التلفاز والمقاعد عادة في ركنين متقابلين من الغرفة؛ حيث يوصي صانعو التلفاز المشاهدين بالجلوس بعيدًا عنه مسافة لا تقل عن ١٣ قدمًا من أجل السلامة. فإذا كان طول كل مربع في المستوى المجاور ١ قدم، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع التلفاز بداخلها؟

مقدمة شاشة التلفاز عند النقطة (١١، ١)، وأول مقعد عند النقطة (٢، ٧).

قانون المسافة بين نقطتين

$$f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (11, 1)$ ، $(x_2, y_2) = (2, 7)$

$$f = \sqrt{(11 - 2)^2 + (1 - 7)^2}$$

بسّط

$$f = \sqrt{(9)^2 + (-6)^2}$$

$$f = \sqrt{81 + 36}$$

لا، اتساع الغرفة ليس كافيًا لهذا الجهاز.

تحقق من فهمك

٢) يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٩، ٠)، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسّر ذلك.

يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين عند معرفة المسافة بينهما ومعرفة إحداثيات إحدهما لإيجاد الإحداثي المجهول للنقطة الأخرى.



الربط مع الحياة

شهد المجتمع السعودي الافتتاح الرسمي للتلفزيون في التاسع من ربيع الأول من عام ١٣٨٥ هـ الموافق ٧ يوليو ١٩٦٥ م، وذلك في عهد الملك فيصل - رحمه الله - وبلغ عدد قنواته حاليًا ٧ قنوات تغطي مجالات مختلفة.

مثال ٣ إيجاد الإحداثي المجهول

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٧، ٤)، (أ، ٣) تساوي ٥ وحدات.

قانون المسافة بين نقطتين

$$f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (7, 4)$ ، $(x_2, y_2) = (a, 3)$ ، $f = 5$

$$5 = \sqrt{(7 - a)^2 + (4 - 3)^2}$$

بسّط

$$5 = \sqrt{(7 - a)^2 + (1)^2}$$

ربّع وبسّط

$$25 = (7 - a)^2 + 1$$

ربّع كلا الطرفين

$$25 = 49 - 14a + a^2 + 1$$

اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

$$0 = 4 - 14a + a^2$$

حلّل

$$0 = (a - 1)(a - 4)$$

خاصية الضرب الصفري

$$0 = a - 1 \quad \text{أو} \quad 0 = a - 4$$

حل كل معادلة

$$a = 1 \quad \text{أو} \quad a = 4$$

تحقق من فهمك

٣) أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، أ)، (٦، ٢) تساوي

١٠ وحدات.

إرشادات للدراسة

قيمتان ممكنتان عند إيجاد الإحداثي المجهول، يكون أمامك خياران؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه، ومن اتجاهين مختلفين.



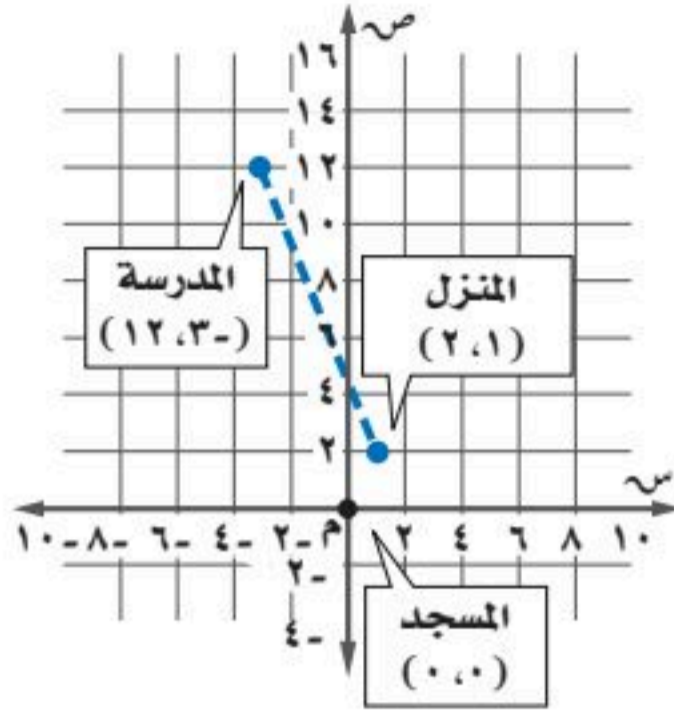
وزارة التعليم

الدرس ٩-٥: المسافة بين نقطتين ١٦٥
2025 - 1447

مثال ١

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$$(1) (8, 12), (2, 6) \quad (2) (8, 4), (6, 3) \quad (3) (3, -5), (-2, 4)$$



مثال ٢

(٤) مسافات: في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند

النقطة $(2, 1)$ ، والمدرسة عند النقطة $(12, 3)$. فإذا كانالمسجد يقع عند النقطة $(0, 0)$ ، وطول ضلع كل مربع في

المستوى الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:

(أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

(ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد.

مثال ٣

في الأسئلة ٥-٨ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

$$(5) (5, -1), (3, 1); \text{ ف } \sqrt{89} \quad (6) (6, 1), (0, 5); \text{ ف } \sqrt{17}$$

$$(7) (5, 8), (2, 1); \text{ ف } \sqrt{5} \quad (8) (6, 1), (-2, 6); \text{ ف } \sqrt{10}$$

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$$(9) (8, 5), (7, 5) \quad (10) (9, 6), (9, 9) \quad (11) (3, 3), (2, 7)$$

$$(12) (8, 7), (10, 3) \quad (13) (9, 11), (4, 3) \quad (14) (5, 3), (3, 5)$$

مثال ٢

(١٥) تحديد مواقع: أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم مشويات

كما في التمثيل المجاور فاستعمل سعد قاربه للوصول إلى

المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علمًا بأن طول ضلع

كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل كيلومترًا واحدًا.

(أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟

(ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟

(ج) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي

قطعها جمال؟



مثال ٣

في الأسئلة ٢٢-٢٥ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

$$(16) (9, -2), (5, 0); \text{ ف } 7 \quad (17) (6, 1), (2, 5); \text{ ف } 10$$

$$(18) (0, 1), (3, 1); \text{ ف } \sqrt{2} \quad (19) (4, 1), (4, 8); \text{ ف } \sqrt{5}$$

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$$(20) (2, 4), (2, 6); \text{ ف } \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (21) (1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{2}) \quad (22) (7, \sqrt{6}), (1, \sqrt{6})$$

(٢٣) هندسة: أوجد محيط الشكل الرباعي أ ب ج د الذي رؤوسه أ $(-3, -4)$ ، ب $(-1, 4)$ ، ج $(5, 4)$ ، د $(6, -5)$.

ثم قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.



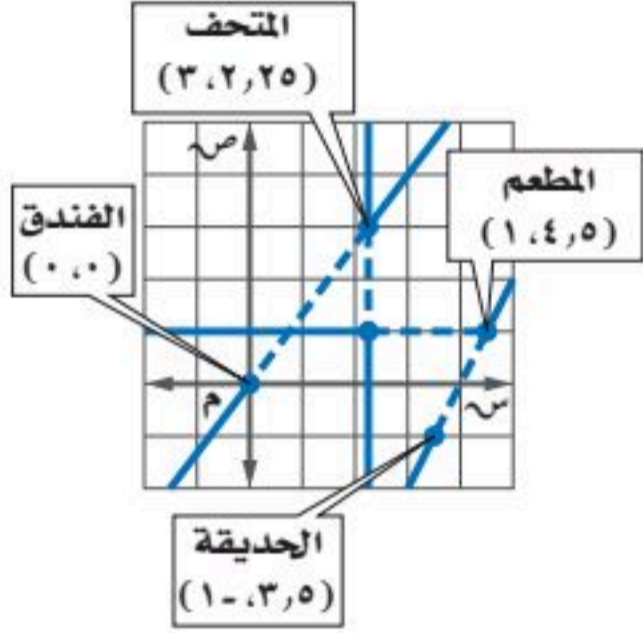


(٢٤) **منافذ المملكة:** يقع منفذ حالة عمّار عند النقطة $(-٢, ٤)$ ،
ومنفذ البطحاء عند $(٥, ٠)$. ما المسافة الجوية التقريبية بين المنفذين؟
مقياس الرّسم: تمثّل كل وحدة على الخارطة ٢٠٠ كلم

هيئة الزكاة والضريبة والجمارك
Zakat, Tax and Customs Authority

الربط مع الحياة

تظهر جهود هيئة الزكاة والضريبة والجمارك في إحباط تهريب المخدرات، حيث أحبط جمرك منفذ حالة عمّار محاولة تهريب ٤٨٣٩٠٠٠ حبة مخدرة، في إحدى العمليّات.



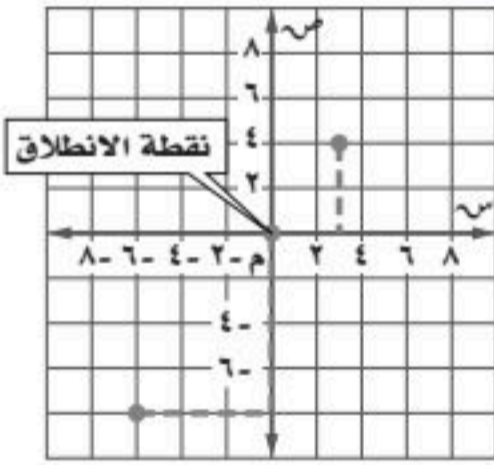
(٢٥) **سياحة:** يستعمل أحمد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) كما في التمثيل المجاور للانتقال من الفندق إلى المتحف الوطني وإلى المطعم ثم إلى الحديقة العامة، ويمثّل طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي ٥٠٠ م. قَرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.
(أ) ما المسافة التي يقطعها من الفندق إلى المتحف؟
(ب) ما المسافة بين المتحف والمطعم؟
(ج) أوجد المسافة المباشرة من الحديقة العامة إلى الفندق.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٦) **تحّد:** إذا كانت أ $(-٧, ٣)$ ، ب $(٤, ٠)$ ، ج $(-٤, ٤)$ إحداثيات رؤوس مثلث، فناقش طريقتين مختلفتين لتحديد ما إذا كان المثلث أ ب ج قائم الزاوية أم لا.

(٢٧) **تبرير:** فسّر لماذا تكون هناك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لنقطة عند إعطاء إحداثيات نقطتين والمسافة بينهما.

تدريب على اختبار



(٢٨) **إجابة قصيرة:** انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه كما في التمثيل أدناه، فاتجه أحدهما شرقاً ثم شمالاً. أما الآخر فاتجه جنوباً ثم غرباً. ما المسافة بينهما؟

مراجعة تراكمية

إذا كان جـ يمثّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقَرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس ٩-٤)

(٢٩) أ = ١٦، ب = ٦٣، جـ = ؟ (٣٠) ب = ٣، أ = $\sqrt{112}$ ، جـ = ؟ جـ = ١٤، أ = ٩، ب = ؟



(٣١) **طيران:** يمكن تمثيل العلاقة بين طول طائرة (ل) بالأقدام، والكتلة المناسبة لأجنحتها (ب) بالأرطال بالمعادلة $l = \sqrt{k \cdot b}$ ، حيث (ك) ثابت التناسب، أوجد قيمة (ك) لهذه الطائرة إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس ٩-٣)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلّ كلّاً من التناسبات الآتية، مقرباً الناتج إلى قرب جزء من مئة إذا لزم:

(٣٤) $\frac{h}{21} = \frac{20}{8}$

(٣٣) $\frac{f}{15} = \frac{7}{5}$

(٣٢) $\frac{2}{10} = \frac{4}{5}$

(٣٧) $\frac{45}{68} = \frac{b}{2}$

(٣٦) $\frac{9}{m} = \frac{16}{7}$

(٣٥) $\frac{7}{j} = \frac{6}{7}$



وزارة التعليم

الدرس ٩-٥: المسافة بين نقطتين
٢٠٢٥ - ١٤٤٧

المثلثات المتشابهة

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لقياس ارتفاع سارية علم المدرسة يحتاج فهد إلى قياس طول ظله وطول ظل السارية، ثم استعمال المثلثات المتشابهة والقياسات غير المباشرة.

المثلثات المتشابهة: تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز \sim يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين. وتُكتب رؤوس المثلثات المتشابهة عادة بالترتيب للدلالة على الأجزاء المتناظرة.

فيما سبق

درست حل التناسبات.

والآن

- أحدّد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.
- أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين.

المضردات

المثلثات المتشابهة

أضف إلى

مطويتك

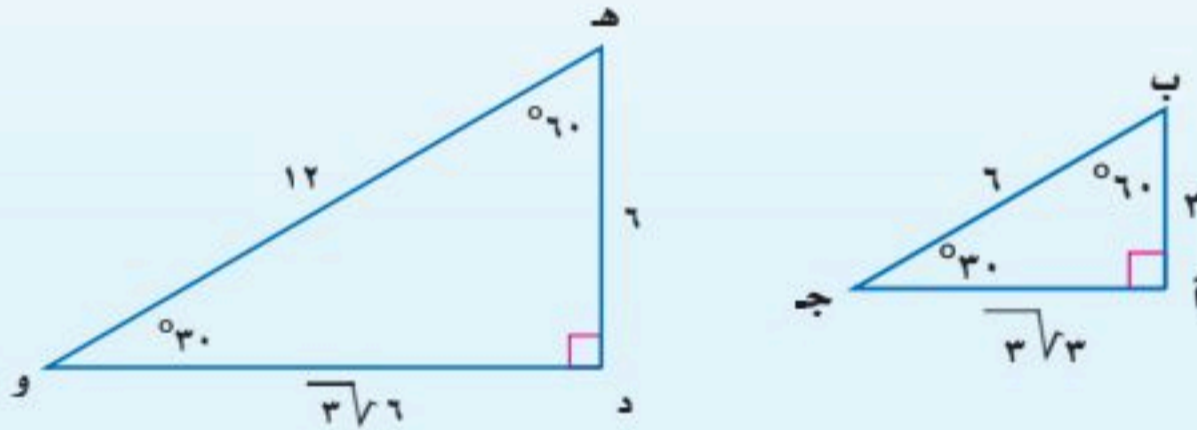
المثلثات المتشابهة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: إذا كان $\triangle أ ب ج \sim \triangle د ه و$ ، فإن $ق د = أ ه$ ، $ق د = ج و$ ، $ق د = و$ ،

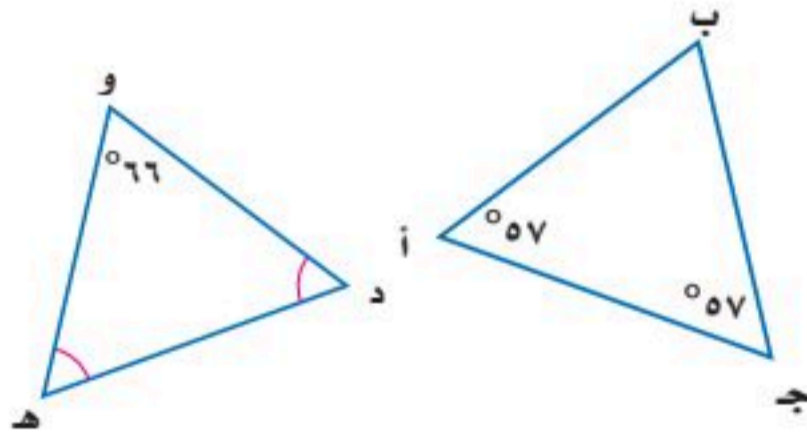
$$\frac{ق د}{أ ب} = \frac{ق د}{ج و} = \frac{ق د}{د ه} = \frac{أ ه}{ج و} = \frac{د و}{أ ب} = \frac{د و}{ج و} = \frac{د و}{د و} = 1$$



يمكن استعمال المقارنة بين قياسات الزوايا المتناظرة لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

مثال ١

تحديد المثلثين المتشابهين



حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

$$\text{قياس } \angle ب = 180 - (57 + 57) = 66^\circ$$

في $\triangle د ه و$ ، يتساوى $ق د = د ه$ ، مع $ق د = د ه$

ولتكن $س = ق د = د ه$

$$س + س + 66 = 180$$

$$2س = 114$$

$$س = 57$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

اطرح 66 من كلا الطرفين

اقسم كلا الطرفين على 2

ولذا فإن $ق د = د ه = 57^\circ$ ، $ق د = د ه = 57^\circ$. وبما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية،

فإن $\triangle ه و د \sim \triangle أ ب ج$.

تحقق من فهمك

(١) حدّد ما إذا كان $\triangle أ ب ج$ الذي فيه $ق د = أ ه = 68^\circ$ ، $ق د = ج و$ يشابه $\triangle د ه ف$ حيث

$ق د = ه ف = 54^\circ$ ، وبرّر إجابتك.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

يمكنك أيضًا استعمال المقارنة بين نسب أطوال الأضلاع المتناظرة؛ لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

قراءة الرياضيات

قياس الزوايا

ق لا يُقرأ: قياس الزاوية أ.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

مثال ٢ تحديد المثلثين المتشابهين

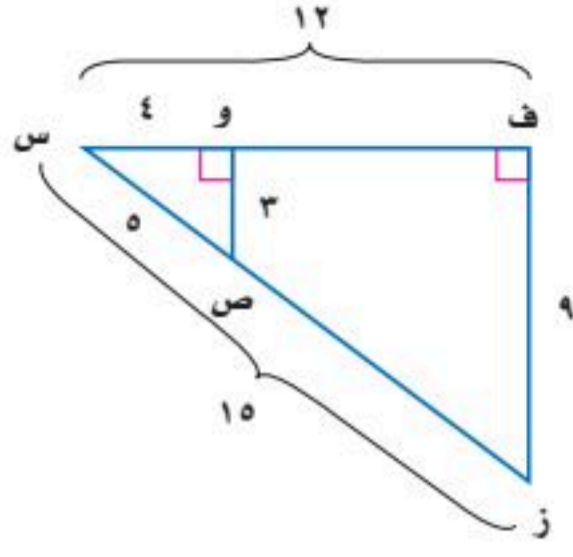
حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

إذا كان \triangle ف س ز، \triangle و س ص متشابهين، فإن أطوال أضلعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{ف س}{و س} = \frac{١٢}{٤} = ٣، \frac{س ز}{س ص} = \frac{١٥}{٥} = ٣، \frac{ف ز}{و ص} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن \triangle ف س ز \sim \triangle و س ص.

تحقق من فهمك ✓

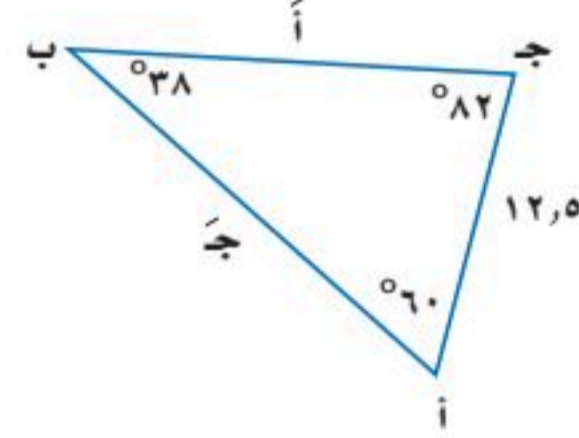
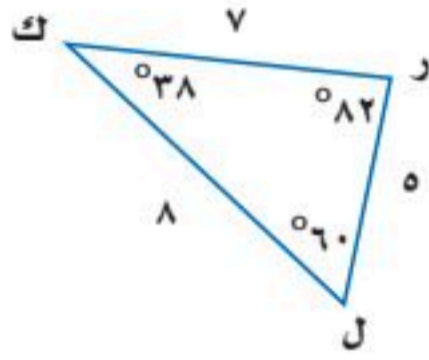


(٢) حدّد ما إذا كان \triangle أ ب ج والذي فيه \angle أ ب = 6° ، \angle ب ج = 16° ، \angle ج د = 20° يشابه \triangle ع ك ل، حيث \angle ع ك = 3° ، \angle ك ل = 8° ، \angle ل د = 9° . وفسّر إجابتك.

إيجاد قياسات العناصر المجهولة: يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

مثال ٣ إيجاد قياسات العناصر المجهولة

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:



الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$$\frac{ب ج}{ك ر} = \frac{أ ج}{ل ر}$$

$$\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{أ}{٧}$$

$$٨٧,٥ = أ$$

اضرب تبادليًا

$$١٧,٥ = أ$$

اقسم على ٥

الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$$\frac{أ ب}{ل ك} = \frac{ب ج}{ل ر}$$

$$\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{ب ج}{٨}$$

$$١٠٠ = ب ج$$

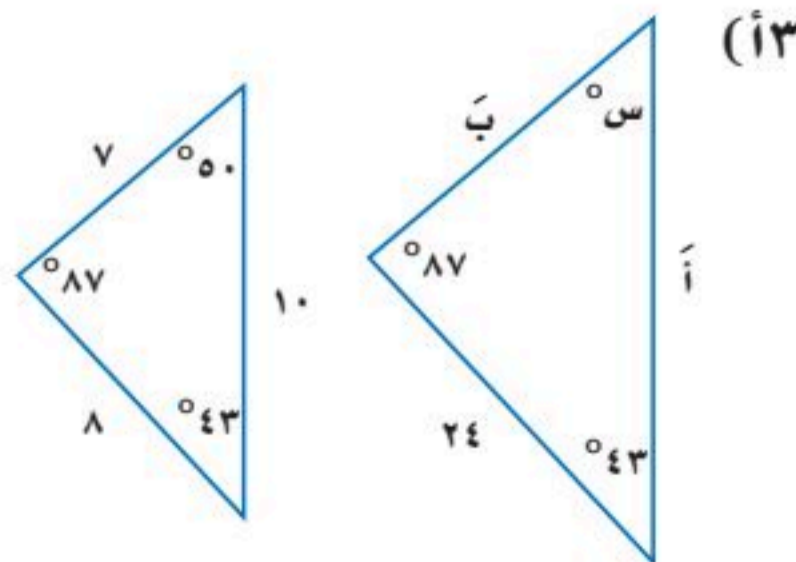
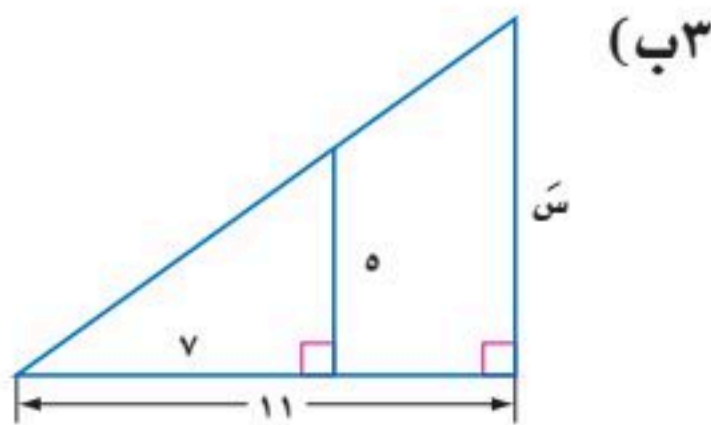
اضرب تبادليًا

$$٢٠ = ب ج$$

اقسم على ٥

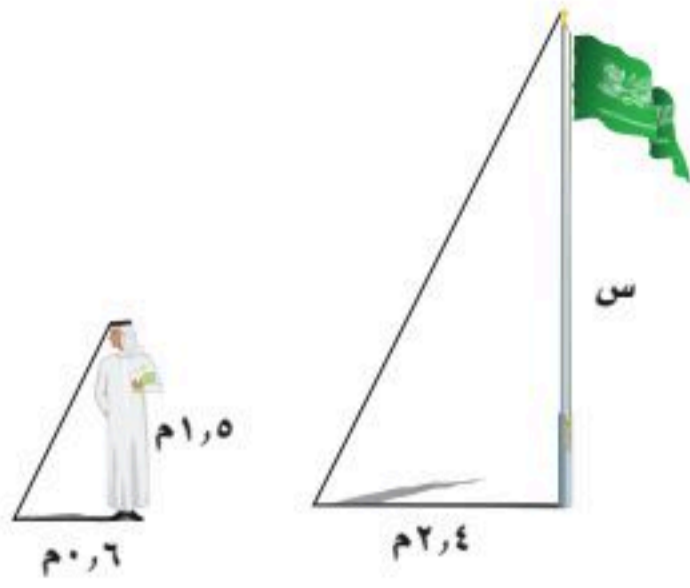
قياسات العناصر المجهولة ٢٠، ٥، ١٧.

تحقق من فهمك ✓



مثال ٤ من واقع الحياة القياسات غير المباشرة

ظل: أراد سلطان قياس ارتفاع سارية العلم، فوقف بجانبها. إذا علمت أن طول سلطان متر و ٥٠ سنتيمترًا، وطول ظله ٦٠ سنتيمترًا، وطول ظل السارية في تلك اللحظة متران و ٤٠ سنتيمترًا، فما ارتفاع السارية؟



افهم: أوجد ارتفاع سارية العلم.

خطط: ارسم شكلاً للموقف.

حل: أشعة الشمس تشكل مثلثات متشابهة.

اكتب تناسبًا يقارن بين ارتفاعات الأجسام وأطوال ظلالها.

لتكن $s =$ ارتفاع سارية العلم

$$\begin{array}{l} \text{ارتفاع السارية} \leftarrow \frac{s}{1,5} \\ \text{طول ظل سلطان} \leftarrow \frac{0,6}{2,4} \end{array}$$

$$s = 3,6$$

$s = 6$ فيكون ارتفاع سارية العلم يساوي ٦ أمتار.

عوض عن s بـ ٦.

$$\frac{2,4}{0,6} = \frac{6}{1,5}$$

$$3,6 = 3,6 \quad \checkmark$$

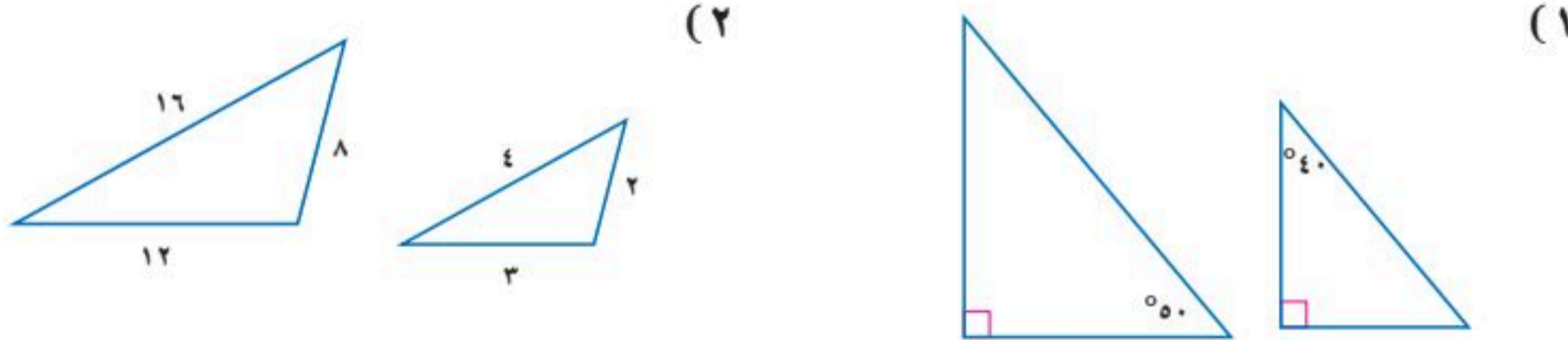
تحقق من فهمك

(٤) **خرائط:** استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١ سم تمثل ٢٥٠ كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ٦٨، ١ سم تقريبًا. فكم المسافة الحقيقية بينهما؟

تأكد

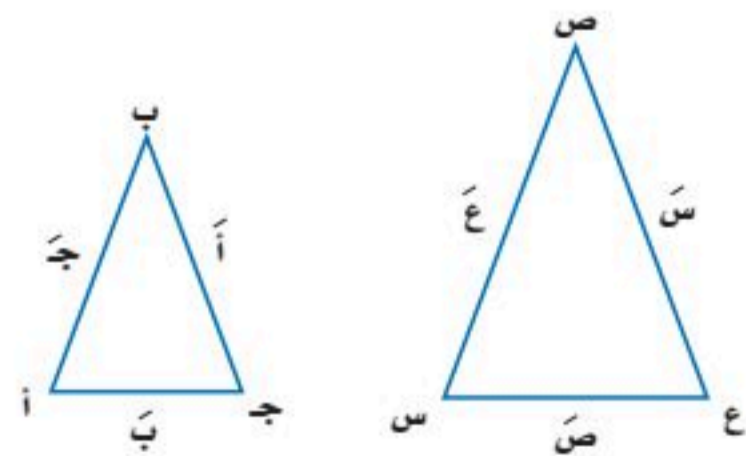
المثالان ١، ٢

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



مثال ٣

في الأسئلة ٣-٦، إذا كان $\Delta أ ب ج \sim \Delta س ص ع$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



(٣) $أ = ٤$ ، $ب = ٦$ ، $ج = ٨$ ، $س = ٦$

(٤) $س = ٩$ ، $ص = ١٥$ ، $ع = ٢١$ ، $ج = ٧$

(٥) $أ = ٢$ ، $ب = ٥$ ، $س = ١٠$ ، $ع = ٣٠$

(٦) $ب = ٦$ ، $ج = ١٠$ ، $س = ٣٠$ ، $ص = ١٥$

مثال ٤

(٧) **أشجار:** ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها متران و ٦٥ سنتيمترًا. فإذا كان طول مريم متر و ٥٠ سنتيمترًا، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتيمترًا. فما ارتفاع الشجرة؟

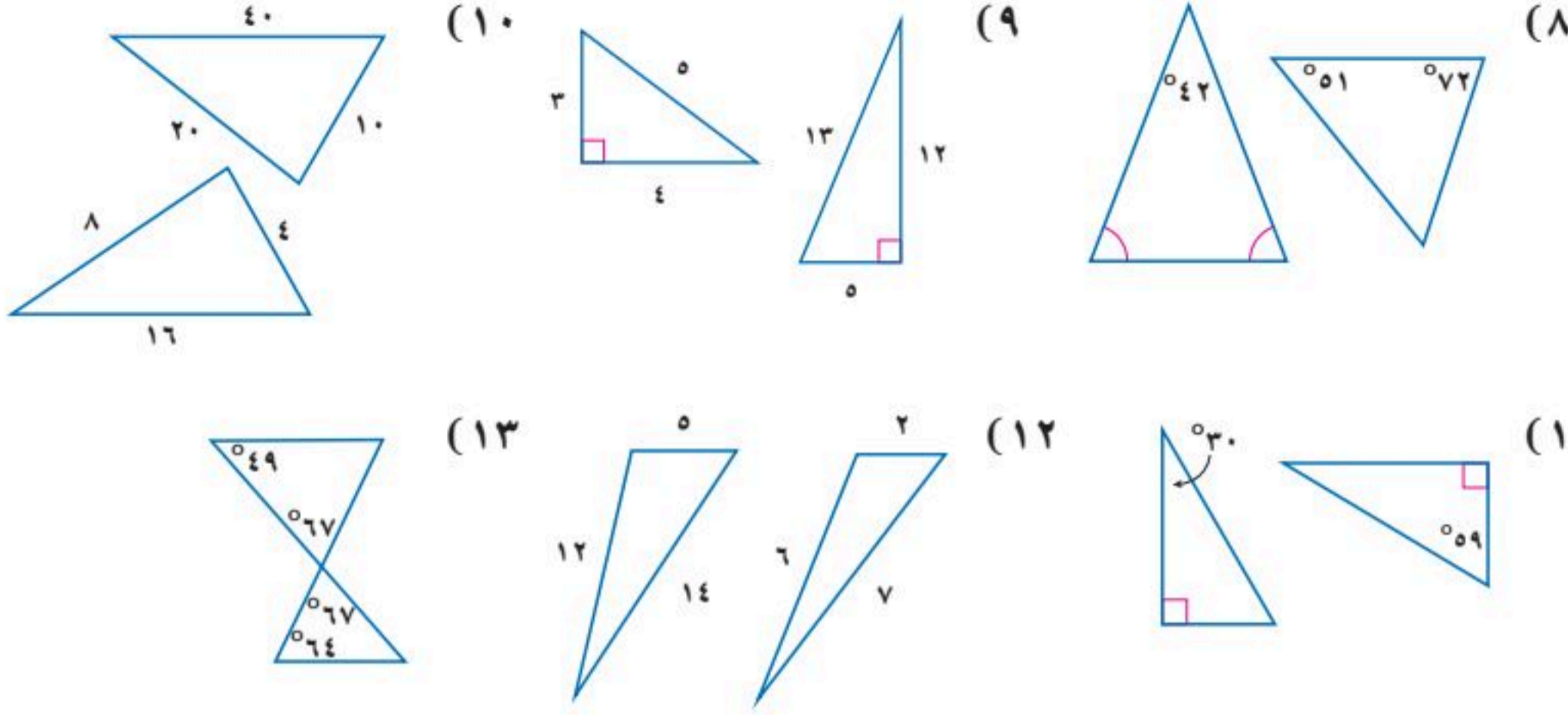


وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

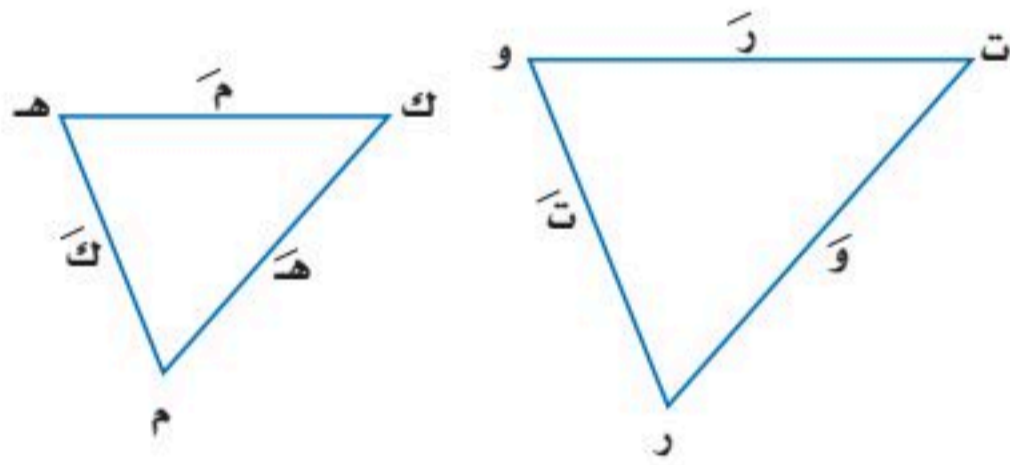
المثالان ١، ٢

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



مثال ٣

في الأسئلة ١٤-١٨، إذا كان $\triangle م ك هـ \sim \triangle ر ت و$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



(١٤) $م = ٢$ ، $ك = ٧$ ، $هـ = ٦$ ، $ر = ٤$

(١٥) $ر = ٥$ ، $ت = ٧$ ، $و = ١٥$ ، $هـ = ٦$

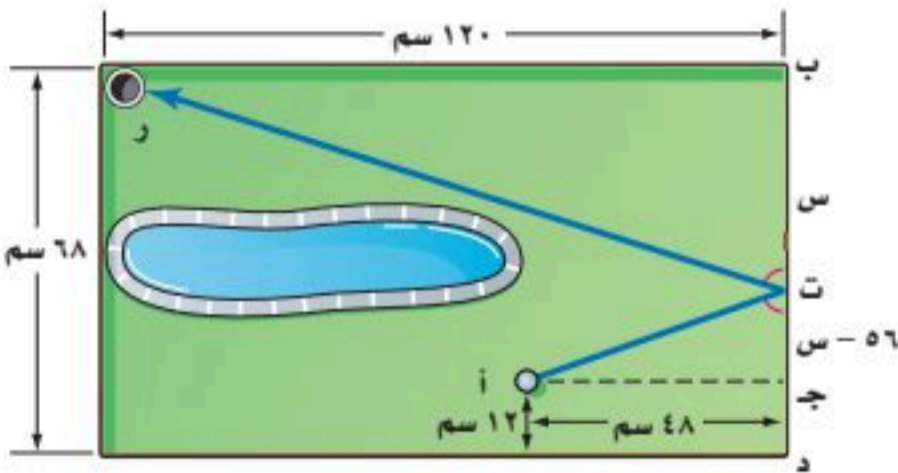
(١٦) $م = ٥$ ، $ك = ٣$ ، $هـ = ٩$ ، $ت = ٥$ ، $و = ١٣$ ، $و = ٧٥$ ، ٩

(١٧) $م = ٤$ ، $ك = ١$ ، $هـ = ٨$ ، $ر = ٢$ ، $و = ٨$ ، $ت = ٥$ ، $و = ٨٤$ ، ٠

(١٨) $م = ٢$ ، $ك = ٧$ ، $هـ = ١٤$ ، $ر = ١٠$ ، $و = ١٤$

مثال ٤

(١٩) **ألعاب:** يستعمل تصميم نموذج المركبات المقياس ١ سم : ٢٤ م من الطول الفعلي للمركبة. إذا كان للمركبة الأصلية نافذة على شكل مثلث قائم الزاوية. ارتفاعها ٧٦ م، فكم سيكون ارتفاع النافذة على النموذج؟



(٢٠) **جولف:** يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب.



الربط مع الحياة

حقّق لاعب ومدرب المنتخب السعودي للجولف علي بلحارث بطولة كأس الوطنية لدولة باكستان للجولف التي نُظّمت في ربيع الثاني ١٤٣١ هـ في نادي ديراب للجولف في الرياض بمشاركة ١٠٠ لاعب.

(٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٥ سم، ٢ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨ سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

(٢٢) **مشروع المدرسة:** خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم ٥ سم : ٦ م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤ م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

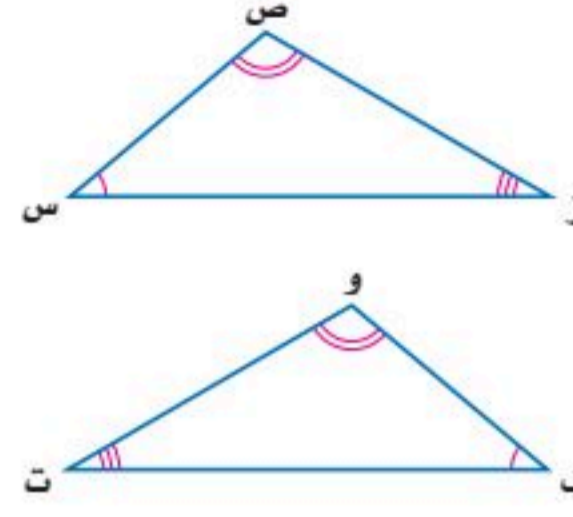


مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٣) **اكتشف الخطأ:** قارنت رهف ونوال بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

نوال
 $ق \triangleleft س = ق \triangleleft و$
 $ق \triangleleft ص = ق \triangleleft ف$
 $ق \triangleleft ز = ق \triangleleft ت$
 $\triangle س ص ز \sim \triangle و ف ت$

رهف
 $ق \triangleleft س = ق \triangleleft ت$
 $ق \triangleleft ص = ق \triangleleft و$
 $ق \triangleleft ز = ق \triangleleft ف$
 $\triangle س ص ز \sim \triangle ت و ف$

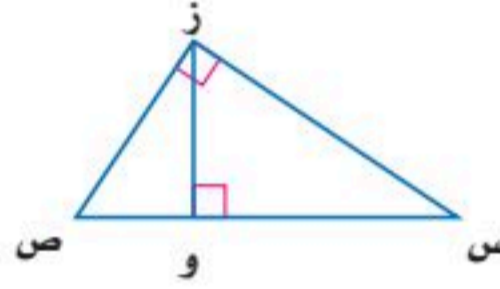


إرشادات حل المسألة

رسم مخطط

ارسم الشكل عندما يتطلب حل المسألة تبريراً مكانياً أو شكلاً هندسياً. فمثلاً في السؤال ٢٤ ارسم كل مثلث وحده ليساعدك على الحل.

(٢٤) **تحذّر:** المثلث س ص ز يشابه المثلثين المتشابهين المكوّنين من القطعة المستقيمة العمودية الواصلة بين ز والقطعة المستقيمة س ص. اكتب ثلاث عبارات تتعلق بهذين المثلثين، ولم تشابه؟



(٢٥) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً؟ فسّر إجابتك.

"إذا ضربت أطوال أضلاع مثلث في ٣، فإن زوايا المثلث بعد تكبيره لها نفس قياسات زوايا المثلث الأصلي."

(٢٦) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً وسمّه أ ب ج، ثم ارسم المثلث المشابه له وسمّه و ك ر، على أن تكون مساحته ٤ أمثال مساحة أ ب ج. وشرح استراتيجيتك.

(٢٧) **اكتب:** لخص كيف تحدد أن المثلثين متشابهان؟ وكيف تجد القياسات المجهولة فيهما؟

تدريب على اختبار

(٢٩) أي المعادلات الآتية تمثّل مستقيماً مقطعه الصادي -٤، وميله ٦؟

- (أ) $ص = ٦س - ٤$ (ب) $ص = -٤س + ٦$
 (ج) $ص = ٦س + ٤$ (د) $ص = ٦س + ٤$

(٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين (٢، -٤)، (-٥، ٨).

(ج) $\sqrt{135}$

(أ) $\sqrt{33}$

(د) $\sqrt{103}$

(ب) $\sqrt{65}$



مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

$$(٣٢) \quad (٥-١)، (٥-١)$$

$$(٣١) \quad (٤، ٢-)، (١٣، ٥)$$

$$(٣٠) \quad (٩، ١)، (٣، ٠)$$

حدّد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا. (الدرس ٩-٤)

$$(٣٥) \quad ٢٦، ٢٤، ١٠$$

$$(٣٤) \quad ١٢، ١٠، ٨$$

$$(٣٣) \quad ٥، ٤، ٣$$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب "أولية": (مهارة سابقة)

$$(٣٨) \quad ٩ت٣ + ٦٦ت٢ - ٤٨ت$$

$$(٣٧) \quad ٩ - ٦س + ٢س٢$$

$$(٣٦) \quad ١٠٠ - ٢ك٤$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا كانت: أ = ٣، ب = ٢-، ج = ٦، فاحسب كلّ ممّا يأتي:

$$(٤١) \quad \frac{أج}{ب٤-}$$

$$(٤٠) \quad \frac{أ٢ب}{ج}$$

$$(٣٩) \quad \frac{ب}{ج}$$

$$(٤٣) \quad \frac{٢-بج}{أ}$$

$$(٤٢) \quad \frac{٣-أج}{ب٢}$$



استقصاء النسب المثلثية



يمكنك استعمال ورقة المربعات لاستقصاء نسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية.

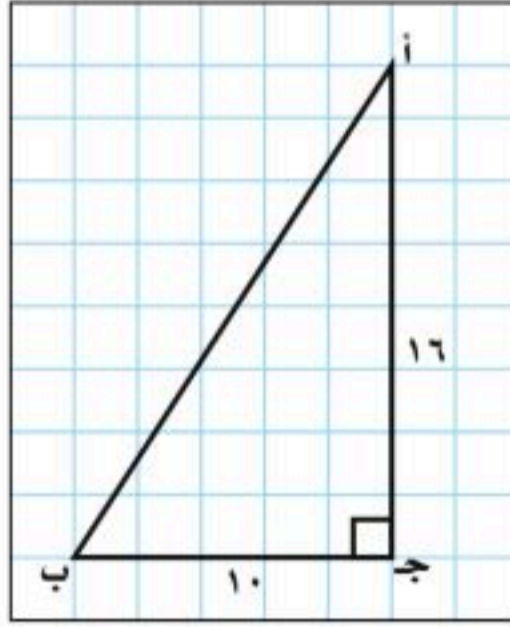
اجمع البيانات:

الخطوة ١: استعمل مسطرة وورقة مربعات لرسم عدة مثلثات قائمة الزاوية النسبة بين ضلعي القائمة لكل منها ٨ : ٥، سمّ الرؤوس أ، ب، ج، حيث ج هي الزاوية القائمة والرأس ب يقابل الساق الأطول، والرأس أ يقابل الساق الأقصر.

الخطوة ٢: انسخ الجدول أدناه، وأكمل الأعمدة الثلاثة الأولى بإيجاد طول الوتر (الضلع أ ب) في كل مثلث قائم تقريباً إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ٣: احسب النسب وسجلها في العمودين الأوسطين مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة ٤: استعمل المنقلة لقياس الزاويتين أ، ب بدقة، مقرباً إلى أقرب درجة، ثم سجل قياسات الزوايا في الجدول.



قياسات الزوايا			النسب		أطوال الأضلاع		
الزاوية ج	الزاوية ب	الزاوية أ	$\frac{ب}{أ}$	$\frac{ج}{أ}$	الضلع أ ب	الضلع أ ج	الضلع ب ج
٩٠°						٤	٢,٥
٩٠°						٨	٥
٩٠°						١٦	١٠
٩٠°							
٩٠°							
٩٠°							

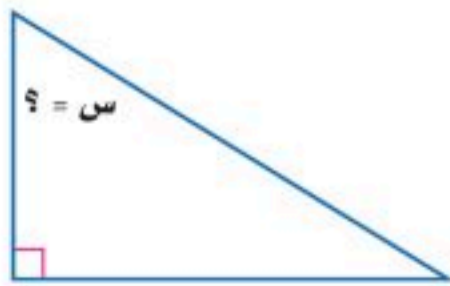
حلّ النتائج:

(١) تفحص قياسات الزوايا في الجدول والنسب بين أطوال الأضلاع. ماذا تلاحظ؟ اكتب جملة أو جملتين لوصف أي نمط تراه.

خمن:

(٢) ما النسبة بين طولي أقصر وأطول ضلع في مثلث قائم الزاوية ومثابه للمثلثات التي رسمتها هنا؟

(٣) إذا كانت نسبة طول أقصر ضلع إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية هي ٥٣,٠ تقريباً. فما قياس الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم الزاوية؟



النسب المثلثية

لماذا؟

يعني معدل انحدار طريق بنسبة ٢٥٪ أن الطريق ترتفع أو تنحدر ٢٥ قدمًا لكل ١٠٠ قدم أفقيًا. ويمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الطريق أو انحدارها.

النسب المثلثية: حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. والنسبة المثلثية هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم. والنسب المثلثية الثلاث الأكثر شيوعًا هي **الجيب**، و**جيب التمام**، و**الظل**، وهي موضحة في الجدول أدناه:



فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد النسب المثلثية للزوايا.
- أستعمل النسب المثلثية لحل المثلث.

المضردات

- حساب المثلثات
- النسب المثلثية
- الجيب
- جيب التمام
- الظل
- حل المثلث
- معكوس الجيب
- معكوس جيب التمام
- معكوس الظل

مفهوم أساسي

النسب المثلثية

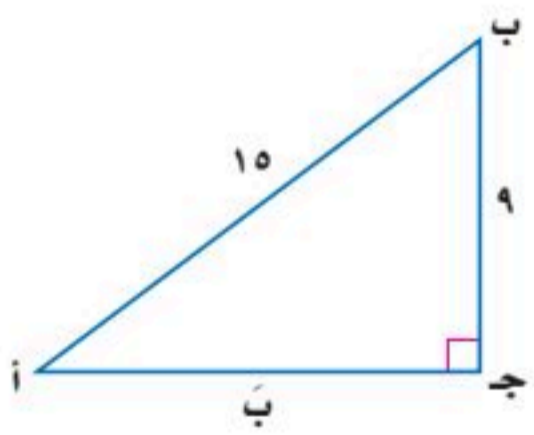
أضف إلى مطويتك

النموذج	الرموز	التعبير اللفظي
	$\frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \text{جا أ}$	جيب الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \text{جتا أ}$	جيب تمام الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	$\frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \text{ظا أ}$	ظل الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$

مثال ١ إيجاد نسب الجيب وجيب التمام، والظل

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.

الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد أ ج.



$$\text{نظرية فيثاغورس} \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2$$

$$\text{أ} = 9, \text{ج} = 12 \quad \text{أ}^2 = \text{ب}^2 + 9^2$$

$$81 = \text{ب}^2 + 81$$

$$144 = \text{ب}^2$$

اطرح ٨١ من كلا الطرفين

$$\text{ب} = 12 \quad \text{أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين}$$

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

تحقق من فهمك ✓

(١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.

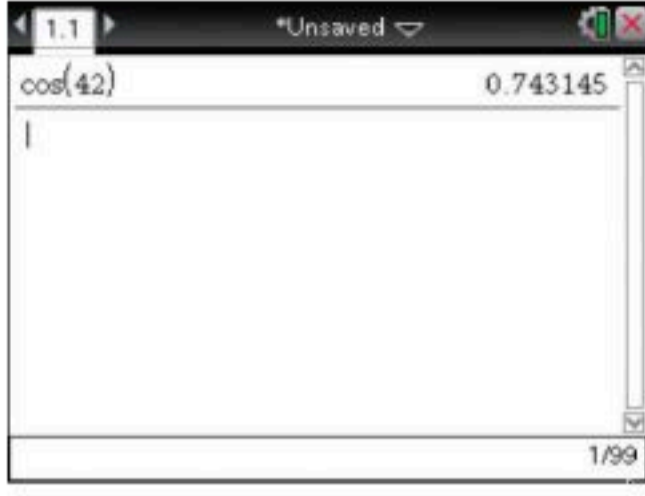


وزارة التعليم

الدرس ٧-٩: النسب المثلثية ١٧٥
2025 - 1447

مثال ٢

استعمال الحاسبة لإيجاد قيم العبارات



استعمل الحاسبة لإيجاد جتا 42° إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

اضغط على المفاتيح:



قرب إلى أقرب جزء من ألف.

جتا $42^\circ \approx 0.7431$.

تحقق من فهمك

(أ) جتا 31° (ب) ظا 76° (ج) جتا 55°

تنبيه

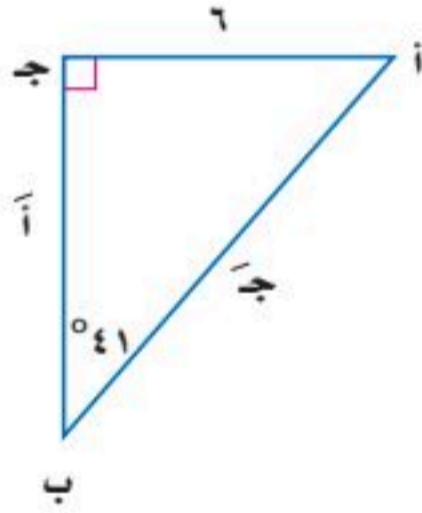
وضع الآلة الحاسبة (mode)

كن متأكدًا من وضع الآلة الحاسبة (mode) للعمل بالدرجات.

استعمل النسب المثلثية: عندما تجد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فإنك تكون بذلك قد قمت **بحل المثلث**، ويمكنك إيجاد القياسات المجهولة إذا علمت طولي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

مثال ٣

حل المثلث



حلّ المثلث القائم الزاوية مقربًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: أوجد قياس Δ . $180^\circ = (90^\circ + 41^\circ) - \Delta$.
قياس $\Delta = 49^\circ$.

الخطوة ٢: أوجد أ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الضلع المجاور للزاوية ب، فاستعمل نسبة الظل.

$$\text{تعريف الظل} \quad \frac{6}{b} = \tan 41^\circ$$

$$\text{اضرب كلا الطرفين في } b \quad 6 = b \tan 41^\circ$$

$$\text{اقسم الطرفين على } \tan 41^\circ, \text{ استعمل الحاسبة} \quad b = \frac{6}{\tan 41^\circ} \approx 9, 6 \text{ تقريبًا}$$

لذا يكون $b = 9, 6$ تقريبًا.

الخطوة ٣: أوجد ج. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة الجيب.

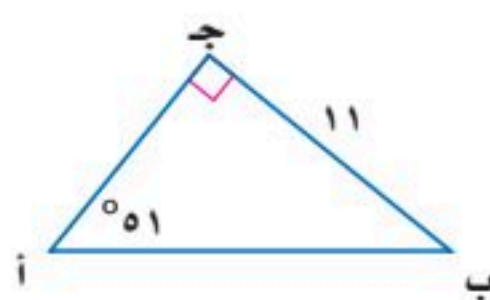
$$\text{تعريف الجيب} \quad \frac{6}{c} = \sin 41^\circ$$

$$\text{اضرب كلا الطرفين في } c \quad 6 = c \sin 41^\circ$$

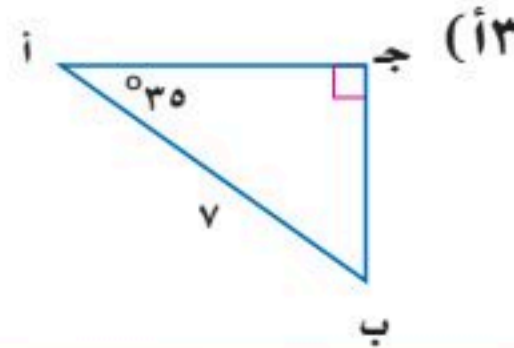
$$\text{اقسم الطرفين على } \sin 41^\circ, \text{ استعمل الحاسبة} \quad c = \frac{6}{\sin 41^\circ} \approx 9, 1 \text{ تقريبًا}$$

ولذا فإن $c = 9, 1$ تقريبًا.

تحقق من فهمك



(ب٣)



(أ٣)

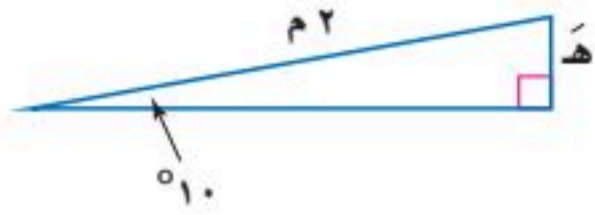


وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

مثال ٤ من واقع الحياة إيجاد طول الضلع المجهول

تمرين: يضع المدرب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار 10° ، فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ م، فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالسنتيمترات تقريباً؟



تعريف الجيب

$$\frac{هـ}{٢} = \sin 10^\circ$$

اضرب كلا الطرفين في ٢

$$هـ = ٢ \times \sin 10^\circ$$

استعمل الحاسبة

$$هـ \approx ٠,٣٥$$

فتكون قيمة هـ بالأمتار تساوي ٠,٣٥، اضرب ٠,٣٥ في ١٠٠ لتحويل الأمتار إلى سنتيمترات. يرفع المدرب الجهاز ٣٥ سم تقريباً.

تحقق من فهمك

(٤) لوح التزلج: ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها 25° ، ويرتفع طرفه ٢ م؟

يُعبّر عن قاعدة الدالة المثلثية إذا علمت الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فيمكنك إيجاد قياسها باستعمال معكوس النسب المثلثية.

الربط مع الحياة

للتمتع بصحة مثالية يجب على جميع الأشخاص من العمر ١٦-٦٥، التدرّب لمدة ٣٠ دقيقة على الأقل على نشاط متوسط الشدة لمدة خمسة أيام في الأسبوع.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي معكوس الدوال المثلثية

إذا كانت Δ زاوية حادة، وكان:

التعبير اللفظي: $\sin \Delta = س$ فإن **معكوس جيب** س ورمزه $\sin^{-1} س$ يساوي قياس Δ .

الرموز: إذا كان $\Delta = س$ ، فإن $\sin^{-1} س = \Delta$.

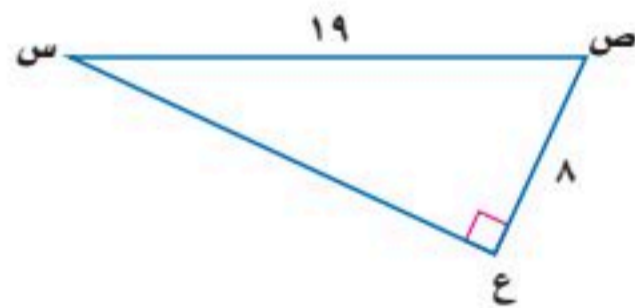
التعبير اللفظي: $\cos \Delta = س$ فإن **معكوس جيب تمام** س ورمزه $\cos^{-1} س$ يساوي قياس Δ .

الرموز: إذا كان $\Delta = س$ ، فإن $\cos^{-1} س = \Delta$.

التعبير اللفظي: $\tan \Delta = س$ فإن **معكوس ظل** س ورمزه $\tan^{-1} س$ يساوي قياس Δ .

الرموز: إذا كان $\Delta = س$ ، فإن $\tan^{-1} س = \Delta$.

مثال ٥ إيجاد قياس الزاوية المجهولة



أوجد Δ ص إلى أقرب درجة.

تعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وقياس الوتر. استعمل نسبة جيب تمام.

تعريف جيب تمام

$$\frac{٨}{١٩} = \cos \Delta$$

استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا $[\cos^{-1}]$ لإيجاد قياس الزاوية.

اضغط على المفاتيح: \cos^{-1} 8 \div 19 \rightarrow enter 65.098937 لذا فإن Δ ص = 65° .

تحقق من فهمك

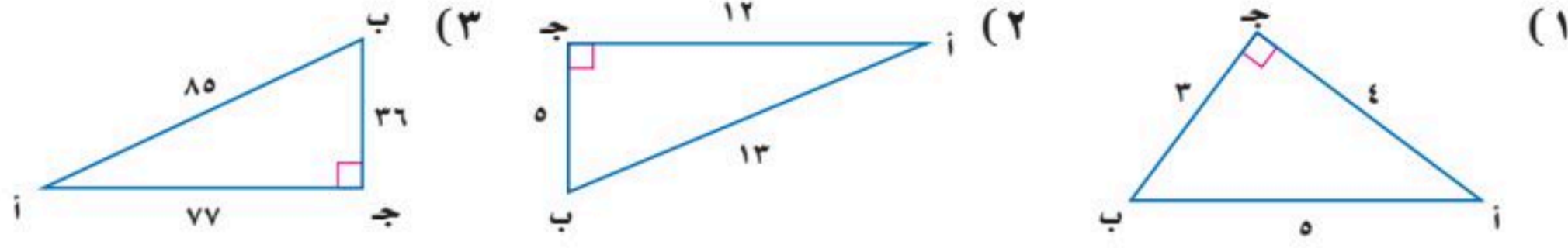
(٥) أوجد Δ س مقرباً إلى أقرب درجة إذا كان $\sin \Delta = ١٤$ ، $\cos \Delta = ٥$.



وزارة التعليم

الدرس ٧-٩: النسب المثلثية 1447 - 2025

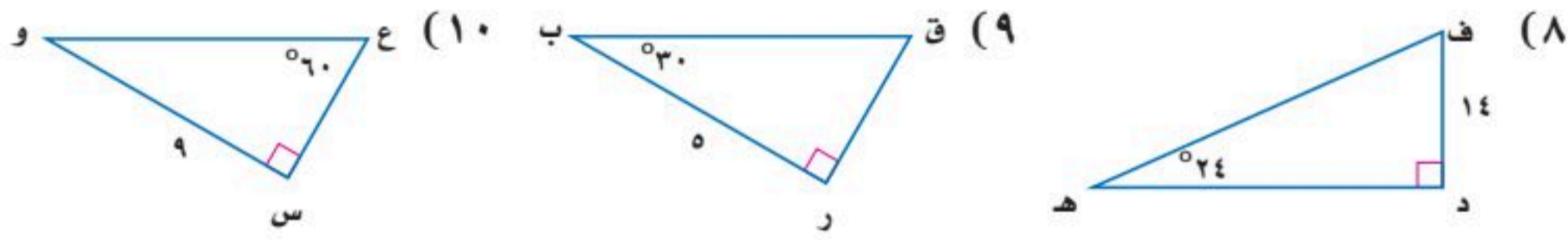
مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:



مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

- (٤) جا 37° (٥) جتا 23° (٦) ظا 14° (٧) جتا 82°

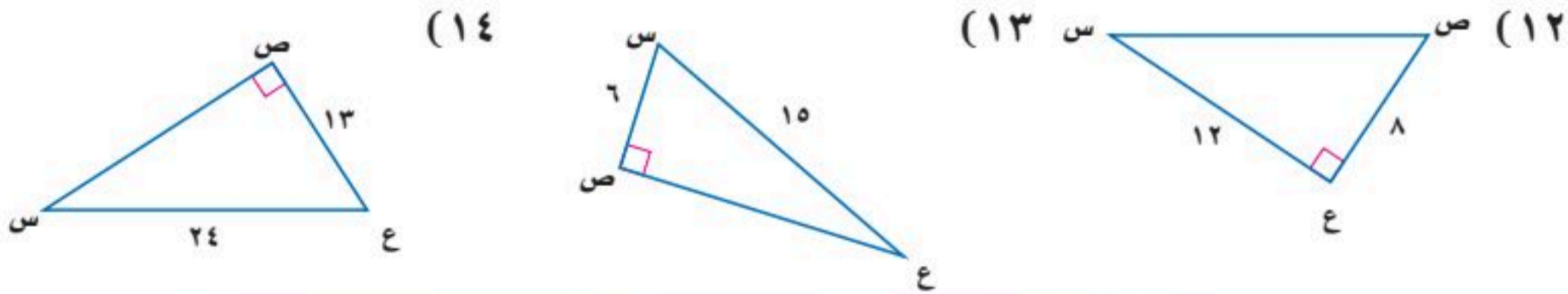
مثال ٣ حل كل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



مثال ٤ (١١) **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسية ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض 18° ، قدر طول (ر).

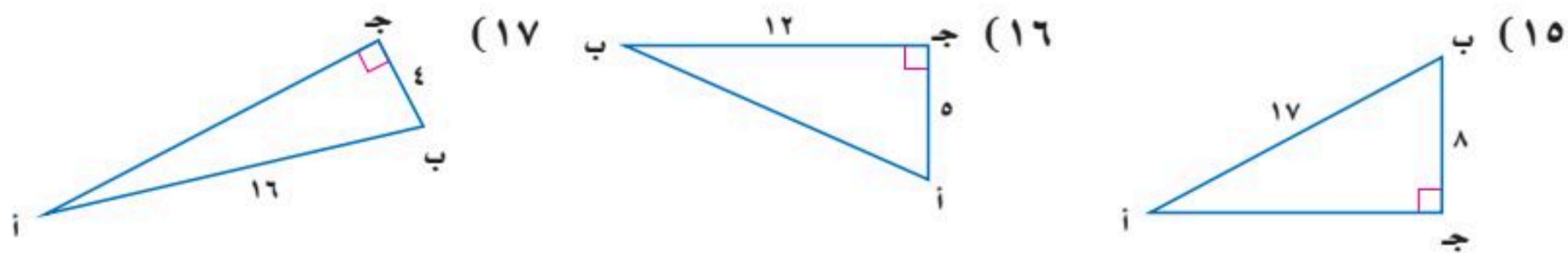


مثال ٥ أوجد ق د س لكل مثلث فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:



تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب في كل مما يأتي:



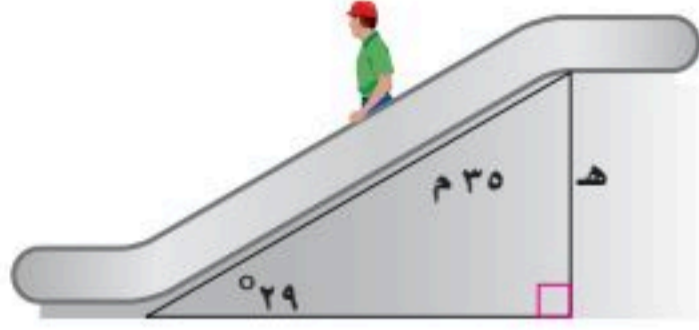
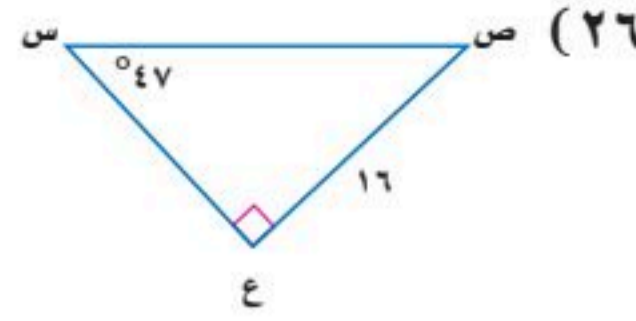
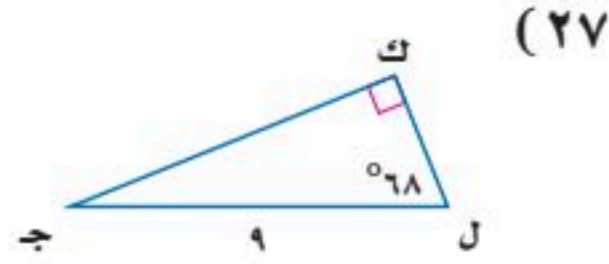
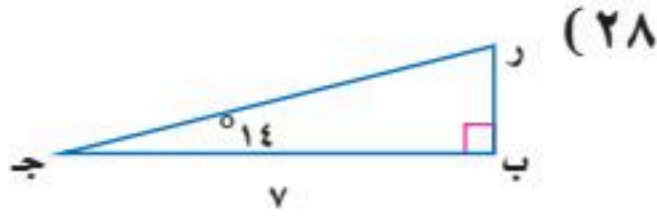
مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

- (١٨) ظا 2° (١٩) جا 89° (٢٠) جتا 44° (٢١) ظا 45°
 (٢٢) جا 73° (٢٣) جتا 90° (٢٤) جا 30° (٢٥) ظا 60°



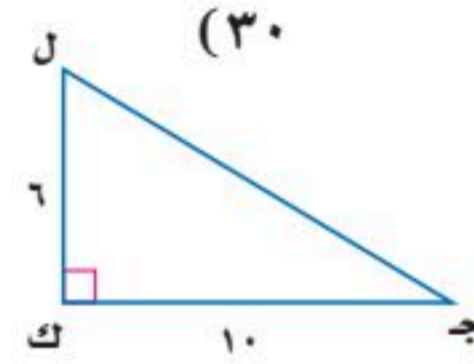
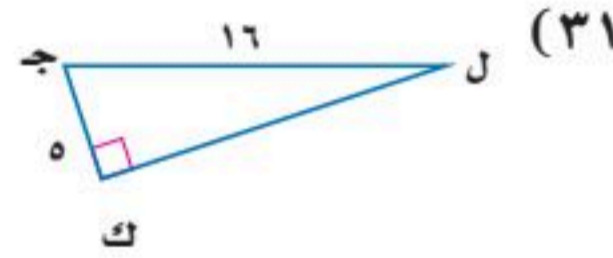
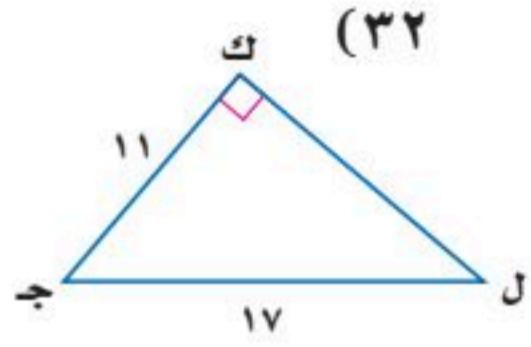
مثال ٣

حل كل مثلث قائم فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



مثال ٤ (٢٩) سلم كهربائي: يبلغ طول السلم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ متراً، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩، أوجد ارتفاع السلم.

مثال ٥ أوجد ق د لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:



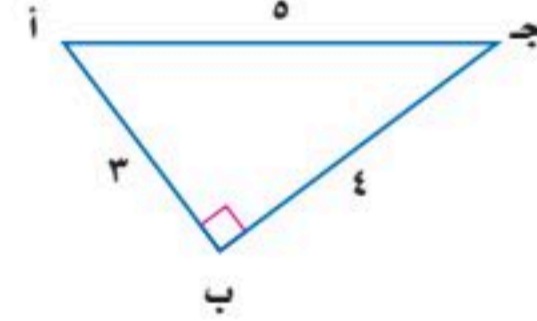
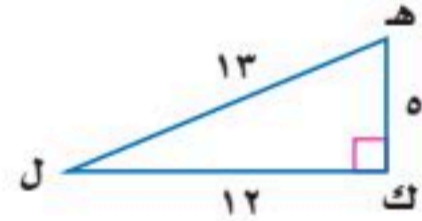
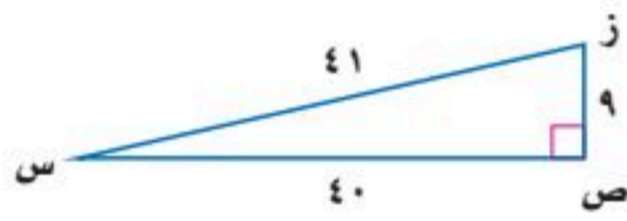
(٣٣) وقف الملك عبدالعزيز: يصل ارتفاع أبراج وقف الملك عبد العزيز المطلة على المسجد الحرام إلى ٤٠٠ متر. ينظر عمار إلى أعلى الأبراج بزاوية ٥٥. فما بُعد عمار عن قاعدة الأبراج؟

(٣٤) غابات: يقدر حارس غابة ارتفاع شجرة بنحو ٥٠ متراً. فإذا كان الحارس يقف على بعد ٣٠ متراً من قاعدة الشجرة، فما مقياس الزاوية التي يشكّلها مع قمة الشجرة؟

في السؤالين ٣٥-٣٦، افترض أن د زاوية حادة في المثلث القائم أ ب ج، ثم أوجد:

(٣٥) ج أ، ظاً إذا كان جتا أ = 3/4. (٣٦) ظاً، جتا إذا كان جتا أ = 2/7.

(٣٧) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة العلاقة بين دوال الجيب ودوال جيب التمام.



(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي وأكمه مستعملاً المثلثات أعلاه:

المثلث	النسب المثلثية	جا ^٢	جتا ^٢	جا ^٢ + جتا ^٢ =
أ ب ج	جا أ = جتا أ	جا ^٢ أ = جتا ^٢ أ	جتا ^٢ أ = جتا ^٢ أ	جا ^٢ أ + جتا ^٢ أ =
ب ج د	جا ب = جتا ب	جا ^٢ ب = جتا ^٢ ب	جتا ^٢ ب = جتا ^٢ ب	جا ^٢ ب + جتا ^٢ ب =
ج ه د	جا ه = جتا ه	جا ^٢ ه = جتا ^٢ ه	جتا ^٢ ه = جتا ^٢ ه	جا ^٢ ه + جتا ^٢ ه =
ه ك ل	جا ل = جتا ل	جا ^٢ ل = جتا ^٢ ل	جتا ^٢ ل = جتا ^٢ ل	جا ^٢ ل + جتا ^٢ ل =
س ص ز	جا س = جتا س	جا ^٢ س = جتا ^٢ س	جتا ^٢ س = جتا ^٢ س	جا ^٢ س + جتا ^٢ س =
	جا ز = جتا ز	جا ^٢ ز = جتا ^٢ ز	جتا ^٢ ز = جتا ^٢ ز	جا ^٢ ز + جتا ^٢ ز =

(ب) لفظياً: خمن علاقة مجموع مربعي دالتي الجيب وجيب التمام لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

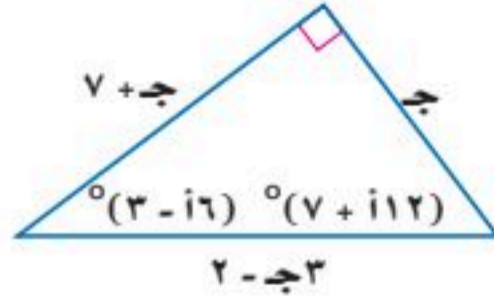
(٣٨) غواصات: إذا نزلت غواصة مسافة ٣ أميال قطرياً بزاوية مقدارها ١٠ مع قاع محيط. فكم يصبح بعدها عن سطح الماء؟



الربط مع الحياة

يبلغ طول أطول شجرة معمّرة نحو ١١٥ متراً. وهناك نحو ١٣٥ شجرة من هذا النوع يزيد طولها على ١٠٧ أمتار.

مسائل مهارات التفكير العليا



(٣٩) **تحّد:** حلّ المثلث في الشكل المجاور.

(٤٠) **تبرير:** استعمل تعريف نسب الجيب وجيب التمام في تعريف نسبة الظل.

(٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة جيب التمام لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية، ثم حلّها.

(٤٢) **تبرير:** إذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين، فماذا تستنتج عن المثلث؟

(٤٣) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث عُلِم فيه قياس زاوية حادة وطول أحد الأضلاع.

تدريب على اختبار

(٤٥) **إجابة قصيرة:** يتقاضى مندوب مبيعات ٦٤٠٠٠ ريال راتباً سنوياً، إضافة إلى ٥٪ من قيمة مبيعاته. ما قيمة المبيعات التي عليه بيعها ليزيد دخله السنوي حتى ٩٠٠٠٠ ريال؟

(٤٤) أيّ المتباينات الآتية تعبّر عن التمثيل البياني أدناه؟

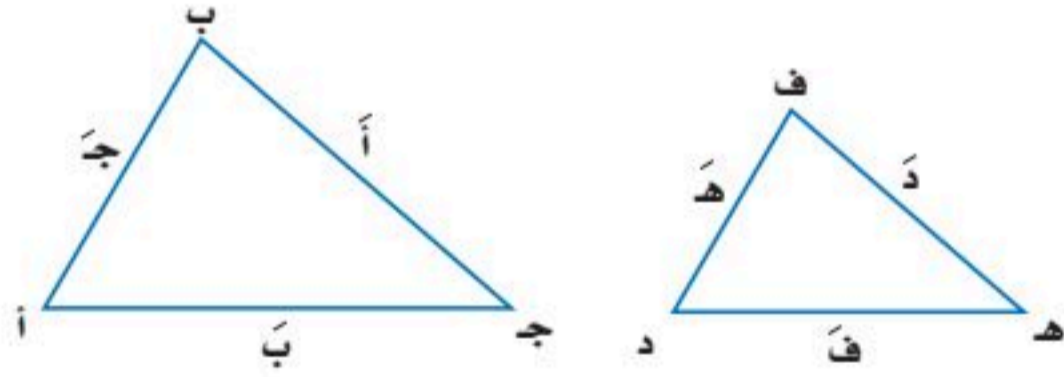


(أ) $2- \leq s \leq 4$ (ج) $s \leq 4$ أو $s \geq 2-$

(ب) $2- > s > 4$ (د) $s < 4$ أو $s > 2-$

مراجعة تراكمية

في الأسئلة ٤٦-٤٨، إذا كان $\Delta أ ب ج \sim \Delta د ف هـ$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة: (الدرس ٩-٦)



(٤٦) أ = ١٦، ب = ١٢، ج = ٨، ف = ٦

(٤٧) د = ٩، ف = ٦، هـ = ٤، ب = ١٨

(٤٨) أ = ٣٦، ب = ٢١، هـ = ١١، ف = ١٤

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائياً كرةً من كيسٍ يحوي ٩ كراتٍ حمراء و ٦ كراتٍ زرقاء و ٥ كراتٍ صفراء، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

(٥١) ح (ليست صفراء)

(٥٠) ح (حمراء)

(٤٩) ح (زرقاء)



بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(1) \sqrt{36} \cdot 5 \quad (2) \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

$$(3) \sqrt{2} \cdot 7 + \sqrt{2} \cdot 2 \quad (4) (\sqrt{2} \cdot 5) \sqrt{2} \cdot 3$$

(٥) هندسة: أوجد مساحة المستطيل.



(أ) $\sqrt{2} \cdot 14$ (ب) $\sqrt{2} \cdot 98$

(ج) 14 (د) $\sqrt{2} \cdot 7$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(6) \sqrt{10} \cdot s = 20 \quad (7) \sqrt{4} \cdot s - 3 = 6 - s$$

(٨) تغليف: حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ ستمترًا

مكعبًا. وتستعمل المعادلة $\text{نق} = \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ط} \cdot \text{ع}}}$ لإيجاد نصف قطر

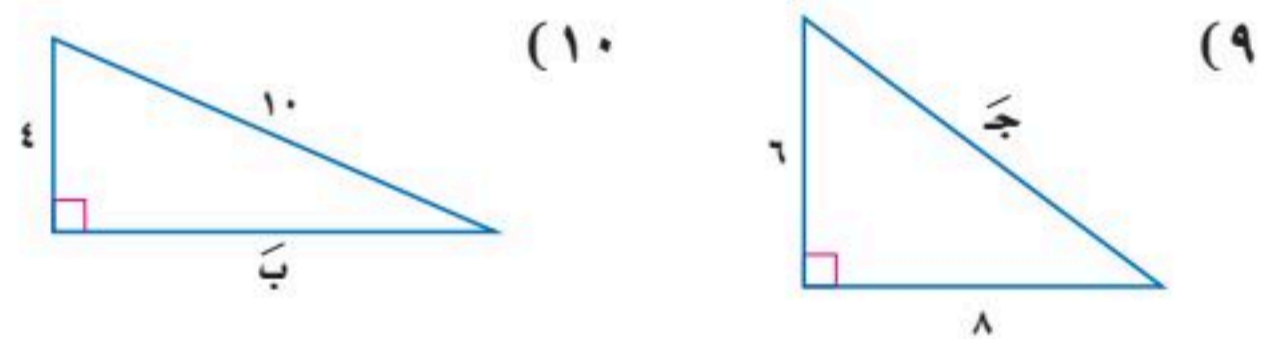
العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح)

حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٢٥، ٨ ستمترات، فأوجد

نصف قطرها.

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الناتج

إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

(١١) (٣، ٢)، (٣، ٥) (١٢) (٤، ٣)، (٢، ٣)

(١٣) (١، ١)، (٢، ٣) (١٤) (٦، ٤)، (١، ٧)

(١٥) خدمة التوصيل: يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة

خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها

١٠ كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات

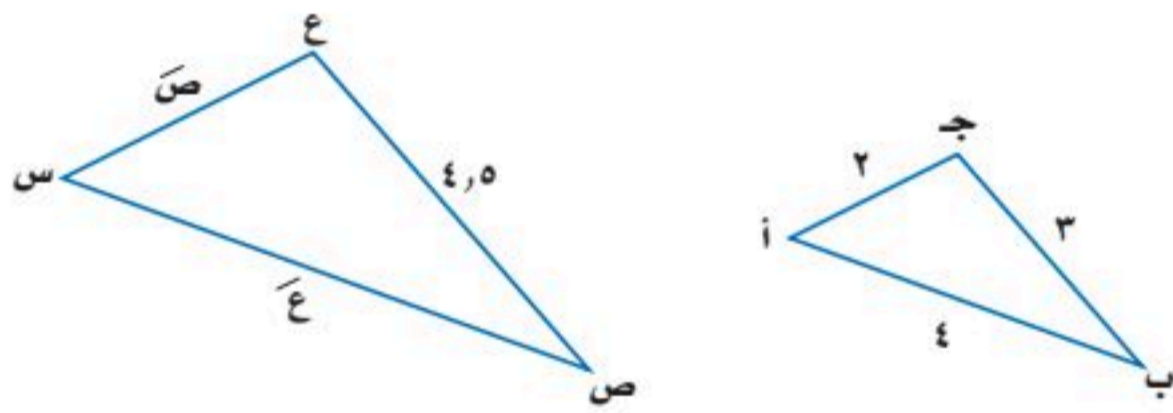
٣٢ شارعًا شمالًا، ثم ٤٥ شارعًا إلى الشرق لإيصال الطلب،

علمًا بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{1}{4}$ كلم.

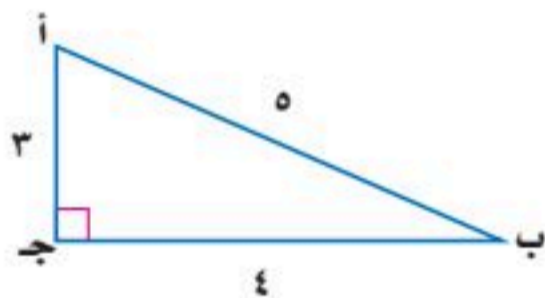
(أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسّر ذلك.

(ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريبًا.

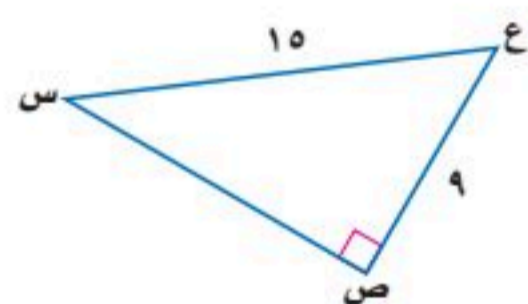
(١٦) إذا كان Δ أ ب ج \sim Δ س ص ع، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة.



(١٧) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



(١٨) أوجد \angle س مقربًا إلى أقرب درجة.



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) بسِّط $\frac{1}{\sqrt{2}+4}$

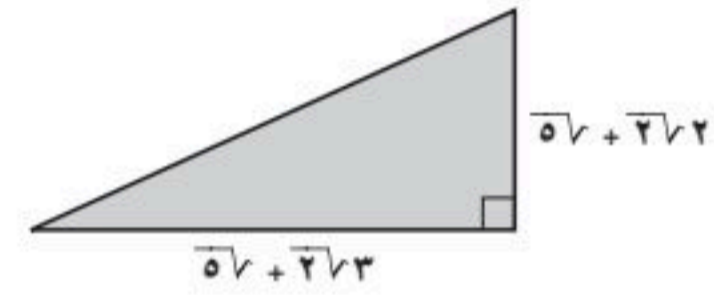
(ج) $\frac{\sqrt{2}-4}{14}$

(د) $\frac{\sqrt{2}+2}{7}$

(أ) $\frac{\sqrt{2}+4}{14}$

(ب) $\frac{\sqrt{2}-2}{7}$

(٢) ما مساحة المثلث أدناه؟



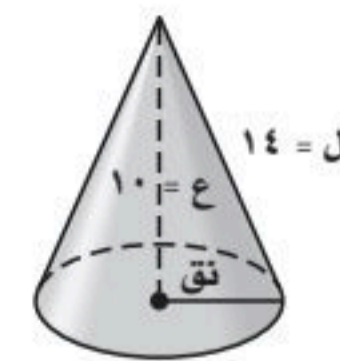
(أ) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

(ب) $10\sqrt{2} + 17$

(ج) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

(د) $10\sqrt{2} + 5 + 8 + 5$

(٣) يحسب طول راسم المخروط (ل) المبيَّن بالشكل أدناه بالعلاقة $ل = \sqrt{ع^2 + نق^2}$ ، حيث نق نصف قطر القاعدة، ع ارتفاع المخروط، استعمل هذه العلاقة لإيجاد نق في الشكل أدناه.



(ج) ٩، ٨

(د) ١٠، ٢

(أ) ٤، ٩

(ب) ٦، ٣

(٤) أيُّ الأطوال التالية لا تمثِّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

(أ) (٢٤، ١٦، ١٢)

(ب) (٢٦، ٢٤، ١٠)

(ج) (٥١، ٤٥، ٢٤)

(د) (٣٠، ٢٤، ١٨)

(٥) أيُّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملاً من عوامل $١٦ - ٤$ ؟

(أ) س - ٢

(ب) س + ٢

(ج) س + ٢

(د) س + ٤

إرشادات للاختبارات

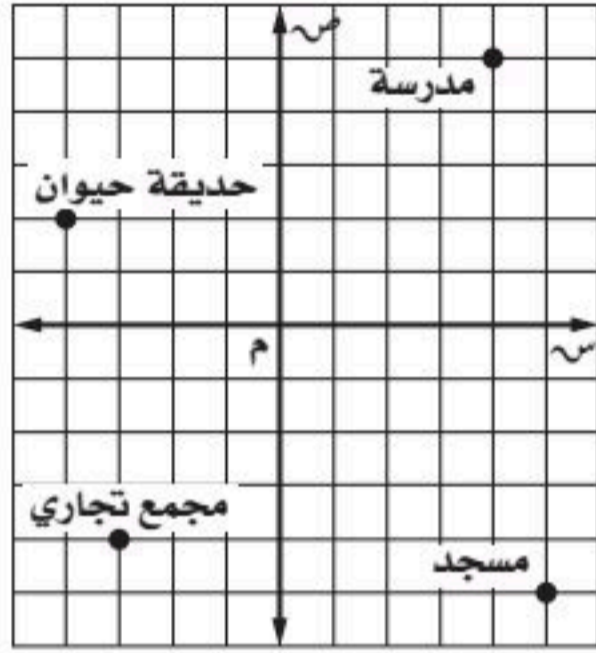
سؤال ٣: عوّض بقيم ل، ع في العلاقة، ثم أوجد قيمة نق.



إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

(١١) حدّدت هدى مواقع بعض الأماكن في حيِّها في المستوى الإحداثي المبيَّن أدناه، حيث الوحدة = ٥, ٢ ميل



(أ) أوجد المسافة الحقيقية بين المدرسة والمسجد مقربًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم.

(ب) إذا وقع منزل هدى في منتصف المسافة بين المدرسة والمجمّع التجاري، فأوجد إحداثيات موقع منزل هدى موضِّحًا خطوات الحلّ.

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) ما عدد المرات التي تتقاطع فيها الدالة $ص = س^٢ - ٤س + ١٠$ مع محور السينات؟

(٧) حلّ كثيرة الحدود $٣٢ - ٤س^٤$ تحليلًا تامًا.

(٨) بسّط العبارة $\left(\frac{٢-٢ر-٢ه٠ن}{٣-٢ن} \right)^٢$

(٩) استعمل خاصية التوزيع لتحليل

$٣س - ٢س - ٦س + ٣س + ٤س$

(١٠) حلّ ثلاثية الحدود: $٩ - ٣س + ٢س^٢$

للمساعدة ..

١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
٥-٩	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٨	مهارة سابقة	٤-٩	٣-٩	١-٩	مهارة سابقة	فراجع الدرس ..

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

فيما سبق

درست إيجاد قيم احتمالات لحوادث بسيطة.

والآن

- أصمّم دراسات مسحية وأقوم نتائجها.
- أحلّ مسائل باستعمال التبديل والتوافق.
- أجد احتمالات حوادث مركبة.

لماذا؟

قطار الحرمين: مشروع قطار الحرمين السريع هو أحد العناصر الهامة في برنامج توسعة شبكة الخطوط الحديدية في المملكة ويصل بين مكة المكرمة والمدينة المنورة، ومجهزاً بأنظمة إشارات واتصالات حديثة، ويقوم المهندسون بمراقبة حركة القطار والمحطات وتدوين ملاحظاتهم في استمارات خاصة لتحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، بهدف الارتقاء بالخدمات المقدمة للحجاج والمعتمرين.

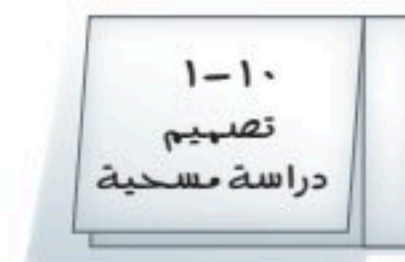
المفردات:

- العينة ص (١٨٦)
- الإحصاء الاستدلالي ص (١٩٨)
- الانحراف المعياري ص (١٩٩)
- التبديل ص (٢٠٦)
- التوافق ص (٢٠٧)
- الحادثة المركبة ص (٢١٣)

الإحصاء والاحتمال: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول الإحصاء والاحتمال، مبتدئاً بست أوراق A4 .

المطويات منظم أفكار

- اطوكل ورقة من المنتصف. وقصّ شريطاً طويلاً بعرض ٢, ٥ سم من الحافة اليمنى حتى خط الطي، ثم افصل الشريط عن خط الطي.
- سمّ خمسة من هذه الأوراق بأرقام الدروس وعناوينها.
- اكتب على جزأي كل ورقة من الداخل: "تعريفات" و"أمثلة".
- رّقب الأوراق بعضها فوق بعض، وثبّتها من طرفها الأيمن، واكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، واكتب ملاحظتك على جزأي الورقة من الداخل.





التهيئة للفصل ١٠

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

إذا اخترت عشوائياً مكعباً واحداً من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء ومكعباً واحداً أخضر، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية: (مهارة سابقة)

(١) ح (أحمر) ح (٢) ح (أزرق)

(٣) ح (ليس أحمر) ح (٤) ح (أبيض)

(٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

(٦) أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق. ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

يوجد في الكيس مكعب واحد أخضر من بين ١١ مكعباً.

$$\frac{\text{عدد المكعبات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للمكعبات}} = \frac{1}{11}$$

إذن، احتمال اختيار مكعب أخضر هو $\frac{1}{11}$.

مثال ٢

أوجد ناتج ضرب $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ في أبسط صورة.

$$\begin{array}{l} \text{اضرب البسطين} \\ \text{اضرب المقامين} \end{array} \quad \frac{3 \times 4}{4 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$\frac{12}{20} =$$

اكتب الكسر في أبسط صورة

$$\frac{3}{5} =$$

مثال ٣

اكتب الكسر $\frac{33}{80}$ على صورة نسبة مئوية، وقرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\frac{33}{80} \approx 0,413 \quad \text{بسط وقرب}$$

اضرب الكسر العشري في ١٠٠

$$41,3 = 100 \times 0,413 \quad \text{إذن، } \frac{33}{80} \approx 41,3\%$$

اختبار سريع

إذا اخترت عشوائياً مكعباً واحداً من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و ٣ زرقاء ومكعباً واحداً أخضر، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية: (مهارة سابقة)

(١) ح (أحمر) ح (٢) ح (أزرق)

(٣) ح (ليس أحمر) ح (٤) ح (أبيض)

(٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

(٦) أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق. ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

$$(٧) \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \quad (٨) \frac{7}{20} \times \frac{4}{19}$$

$$(٩) \frac{7}{32} \times \frac{4}{32} \quad (١٠) \frac{6}{11} \times \frac{5}{12}$$

$$(١١) \frac{24}{100} \times \frac{56}{100} \quad (١٢) \frac{17}{27} \times \frac{9}{34}$$

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية، مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

$$(١٣) \frac{14}{17} \quad (١٤) \frac{7}{8}$$

$$(١٥) \frac{107}{125} \quad (١٦) \frac{625}{1024}$$

(١٧) **تسوق:** زار ٢٠٠٠ متسوق مركزاً تجارياً، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من المتسوقين؟





تصميم دراسة مسحية

لماذا؟



عند صناعة الملابس الرياضية يجب التحقق من عدة أمور لضمان الجودة؛ مثل: فحص نوع القماش، ومدى مناسبه للرياضة المعنيّة، والألوان، والأعمال الفنية المطبوعة عليه وغيرها. وستكون التكلفة عالية جداً إذا فحص كل زيّ يتم إنتاجه في المصنع؛ لذا فإنه يتم فحص عدد محدود من تلك الملابس بدلاً من ذلك.

وجميع الملابس الرياضية المنتجة تشكّل المجتمع، بينما تشكّل الملابس الرياضية التي يتم فحصها عينة من هذا المجتمع. ويتوصل الفاحصون إلى استنتاجات حول العينة ويعمّمونها على المجتمع كله.

تصميم الدراسة المسحية: تُعدّ **العينة** جزءاً من مجموعة أكبر تُسمى **المجتمع**. وحيث إن فحص كل عنصر في المجتمع أمر غير عملي، يتم اختيار عينة لتمثل هذا المجتمع. وبعد تحليل النتائج الخاصة بالعينة يمكن التوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً. وكلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج أكثر تمثيلاً للمجتمع.

وللتوصل إلى استنتاجات صحيحة من البيانات التي تجمع من العينة، تحتاج أن تحدد أولاً أفضل أسلوب لجمع البيانات.

فيما سبق

درست تنظيم البيانات باستعمال الجداول التكرارية.

والآن

- أصمّم دراسة مسحية.
- أعرّف الطرق المختلفة لاختيار العينة.

المفردات

العينة

المجتمع

الدراسة المسحية

الدراسة القائمة على

الملاحظة

التجربة

العينة المتحيزة

العينة العشوائية

العينة العشوائية البسيطة

العينة العشوائية الطبقية

العينة العشوائية المنتظمة

أضف إلى

مطوياتك

أساليب جمع البيانات

مفهوم أساسي

مثال	التعريف / الاستعمال	الأسلوب
لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالباً عن رأيهم في فقرات الإذاعة.	<ul style="list-style-type: none"> تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع. 	<p>الدراسة المسحية</p>
تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر الستين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتاً على تلك التي لا تصدر أصواتاً.	<ul style="list-style-type: none"> تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع. 	<p>الدراسة القائمة على الملاحظة</p>
يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيباً في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيباً في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.	<ul style="list-style-type: none"> تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثة ما. 	<p>التجربة</p>



إحصاء السكان هو مسح لجميع أفراد المجتمع. لذا لا تستعمل الإحصاءات السكانية أسلوب العينة، وقد أجري آخر إحصاء في المملكة عام ٢٠٢٤م.

مثال ١

تصنيف أساليب جمع البيانات

تبرّع: ترغب جمعية خيرية في معرفة مدى رغبة الناس في تقديم التبرعات للجمعيات الخيرية. فوزعت ١٠٠٠ استبانة على سكان أحد الأحياء.

(أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الأشخاص الذين تسلموا الاستبانة، وعددهم ١٠٠٠ شخص.

أما المجتمع: فجميع سكان ذلك الحي.

(ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه الجمعية.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد العينة نحو الاستبانة.

تحقق من فهمك

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:



المجموعة ٢
طعام بلا سكر

المجموعة ١
طعام فيه سكر

(أ١) **بحوث:** قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.

(ب) **إعادة التدوير:** يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائياً ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

هناك عوامل تؤثر في جمع البيانات والاستنتاجات التي يتم التوصل إليها. فإذا كانت طريقة اختيار العينة تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى فإن العينة تكون **عينة متحيزة**، والبيانات المأخوذة منها متحيزة، وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار، وتُسمى **عينة عشوائية**.

مثال ٢

تحديد تحيز العينة

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

(أ) **فضائيات:** سُئل كل خامس شخص يدخل إلى متجر عن القناة الفضائية التي يفضلها.

غير متحيزة؛ لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائياً.

(ب) **هوايات:** سُئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هوايته المفضلة.

متحيزة؛ لأن الهواية الأكثر تفضيلاً للأشخاص الموجودين في المكتبة هي المطالعة.

تحقق من فهمك

(أ٢) **مدرسة:** سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

(ب) **مطاعم:** يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد

العاملين مدة ساعة في اليوم.



أساليب المعاينة: تُستعمل بيانات العينة لتقدير إحدى سمات المجتمع كاملاً. وتُختار العينة العشوائية من المجتمع على أن تكون ممثلة له دون إعطاء أفضلية لفئة معينة على أخرى. ويعرض الجدول الآتي ثلاثة أنواع من العينات العشوائية:

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأى عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقيّة	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعاً لفترة زمنية محددة، أو فئة محددة من العناصر.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

مثال ٣ تصنيف العينات العشوائية

حديقة الحيوانات: وزعت الحيوانات في إحدى الحدائق إلى مجموعات تبعاً لموطنها، ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.

(أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

تتكون العينة من أزواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة. والمجتمع هو جميع الحيوانات الموجودة في الحديقة.

(ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك.

هذه العينة طبقية؛ حيث قُسمت الحيوانات إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

تحقق من فهمك

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

(أ) **مستشفى:** اعتماداً على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

(ب) **طعام:** يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءاً بوقت يُحدّد عشوائياً.

(ج) **احتفالات:** تلتصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.



الربط مع الحياة

افتتح مستشفى الدمام المركزي عام ١٣٨٣هـ بسعة ٥٠ سريرًا، واستمر في التطور وزيادة الأقسام والعيادات حتى أصبح مجمعاً طبياً متكاملًا باسم مجمع الدمام الطبي، يقدم خدماته إلى سكان مدينة الدمام والمنطقة الشرقية من المملكة.



مثال ١

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

- (١) **مجلات:** يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلّافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائياً للانتقاء من بين هذه التصاميم.
- (٢) **رياضة:** يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعاراً للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائياً عن آرائهم.

مثال ٢

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

(٣) **هوايات:** يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

(٤) **تسوق:** سُئل كل خامس عشر متسوّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدّم له.

مثال ٣

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، مفسّراً إجابتك:

(٥) **بطاقات مصوّرة:** ورّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائياً من كل مجموعة.

(٦) **تلفزة:** تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائياً من أنحاء المملكة كافة.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

عيّن فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

(٧) **صحف:** يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلى جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.

(٨) **رحلات:** سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً.

مثال ٢

حدّد في كل مما يأتي إن كانت كل العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

(٩) **مكتبة:** سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتاباً إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة.

(١٠) **ملابس:** يُعطي محل بيع ملابس كل زبون بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضّلها.

مثال ٣

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

(١١) **توظيف:** صنّفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

(١٢) **تسوق:** يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبوناً.





الربط مع الحياة

حمل الحقيبة المدرسية بطريقة صحيحة يجعل الظهر مشدوداً، ولا يسبب تقوس العمود الفقري، بشرط توزيع ثقلها على الكتفين، ووجود مسند مناسب له على الظهر، وعدم تحميلها بأشياء كثيرة وغير ضرورية، وألا تتعدى كتلتها الإجمالية ١٠٪ من كتلة الطالب.

- (١٣) **حقائب:** أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة على زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.
- (أ) حدّد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه.
- (ب) صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل.
- (ج) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.
- (د) إذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة.

- (١٤) **تمثيلات متعددة:** سوف تقوم في هذه المسألة بتصميم وتنفيذ دراسة مسحية خاصة بك.
- (أ) **كتابياً:** اكتب سؤالاً ذا معنى تريد إجابته من خلال دراسة مسحية، ثم صف الطريقة التي ستستعملها في جمع البيانات، واطرح سبب اختيارك إياها.
- (ب) **تحليلياً:** صمم طريقة لتنفيذ دراستك باستعمال عينة غير متحيزة. فسّر سبب اختيارك للعينة.
- (ج) **تطبيقياً:** نفذ دراستك.
- (د) **جدولياً:** سجّل نتائج الدراسة في جدول.
- (هـ) **بيانياً:** استعمل التمثيل البياني (بالخطوط، أو بالقطاعات الدائرية، أو بالمدرج التكراري)، أو أي طريقة بصرية أو بيانية؛ لعرض نتائج الدراسة على طلاب الصف.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (١٥) **تبرير:** قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عرضها الدرس.
- (١٦) **مسألة مفتوحة:** صف مثلاً من واقع الحياة لدراسة قائمة على الملاحظة.
- (١٧) **اكتب:** فسّر أهمية الدراسات المسحية المضبوطة للشركات، وكيف يمكن للشركات استعمالها.

تدريب على اختبار

- (١٨) **إجابة قصيرة:** تزيد فترة الاحتراق الأولى لصاروخ مقدار ٢٨ ثانية على الفترة الثانية. فإذا كانت مدة الاحتراق كاملة ١٥٢ ثانية فكم ثانية مدة الفترة الأولى؟
- (١٩) **هندسة:** ثني سلك طوله ٤٢ سنتيمتراً ليكون مستطيلاً طوله يساوي مثلي عرضه. أوجد بُعدي المستطيل.
- (أ) ٥ سم، ١٢ سم
- (ب) ٧ سم، ١٤ سم
- (ج) ٩ سم، ١٦ سم
- (د) ١١ سم، ١٨ سم

مراجعة تراكمية



٣ - ١

- (٢٠) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور $٦س^٢ + ١٩س - ٧$ وحدة مربعة، فما عرضه؟ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

- (٢١) **علوم طبيعية:** في تجربة إلقاء جسم من ارتفاع ٥ م، قام الطلاب بتسجيل ارتفاع الجسم عن الأرض، والزمن الذي استغرقه، فكانت كالآتي: (مهارة سابقة)

الارتفاع (سم)	٥٠٠	٤٨٠	٤٢٢	٣٢٤	١٨٦	١٠
الزمن (ثانية)	٠	٠,٢	٠,٤	٠,٦	٠,٨	١

مثل العلاقة بين ارتفاع الجسم والزمن بيانياً.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

تحليل نتائج الدراسة المسحية

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



ترغب الشركات عادة في استعمال الدراسات المسحية للحصول على تغذية راجعة حول أدائها في مجالات عملها بدءاً من المبيعات وانتهاءً بمواقعها الإلكترونية. وقد حصلت شركة على النتائج المبينة في الشكل المجاور في استطلاع حول موقعها الإلكتروني. ماذا تعني هذه القيم؟ وما الطريقة التي جمعت بها هذه البيانات؟ وهل تمثل العينة زبائن الشركة بدقة؟

تلخيص نتائج الدراسة المسحية: بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية، فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى. ويمكن تلخيص بيانات الدراسات المسحية باستعمال **مقاييس النزعة المركزية.**

فيما سبق

درست تصميم الدراسات المسحية.

والآن

- أخص نتائج الدراسة المسحية.
- أقوم نتائج الدراسة المسحية.

المفردات

- مقاييس النزعة المركزية
- البيانات الكمية
- البيانات النوعية

ملخص المفهوم

مقاييس النزعة المركزية

أضف إلى مطويتك

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسوماً على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

بعض البيانات لا يمكن تحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، لكن **البيانات الكمية** التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة، أو كتل الأجسام، بينما **البيانات النوعية** لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل. ويمكن أحياناً أن تكون البيانات كمية ولا نستطيع أن نجد مقاييس النزعة المركزية، ويحدث هذا عندما تمثل البيانات أشياء مختلفة؛ أي لا تكون الأعداد أو النسب للشيء نفسه.

مثال ١ اختيار طريقة تلخيص البيانات

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

الخضراوات	السعر	الخضراوات	السعر
بصل أخضر	١٤	قرنبيط	١٠
فاصولياء	٣٠	خيار	١٧
فلفل	٢٠	ذرة	٦٦
بادنجان	٢٥	خس	٩
ملفوف	١٧	سبانخ	٩
جزر	٢٨	كوسا	١٧

(أ) **تغذية:** يبيّن الجدول المجاور السعرات الحرارية في الطبق لكل نوع من الخضراوات. رتب هذه القيم تصاعدياً: ٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦. تلاحظ وجود قيمة أكبر كثيراً من سائر القيم وهي ٦٦، ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات. وهناك مجموعتان فقط من الأعداد

المتماثلة؛ لذا فالوسيط هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات.

{٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦}

الوسيط ١٧ سعراً.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

الدرس ١٠-٢: تحليل نتائج الدراسة المسحية

النسبة المئوية	الاستجابة
٨	٣ سنوات على الأقل
١٥	سنة إلى أقل من ٣ سنوات
٤٥	٦ شهور إلى أقل من سنة
٣٢	أقل من ٦ شهور

(ب) **عمرة:** أجرت وكالة سفريات دراسة مسحية على ١٠٠٠ شخص حول الزمن الذي مضى على آخر عمرة لكل منهم والنتائج يوضحها الجدول المجاور.

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لهذه المجموعة من البيانات؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تمثل شيئاً مختلفاً.

فعلى سبيل المثال، أجاب ١٥٪ من الأشخاص بأنه قد مضى من سنة إلى أقل من ٣ سنوات على أدائهم العمرة، بينما ذكر ٣٢٪ منهم أنهم أدوا آخر عمرة قبل أقل من ٦ شهور. فالوسيط لهذه البيانات وهو ٥, ٢٣٪ ليس له أي معنى في هذه الحال.

تحقق من فهمك

عدد الزبائن			
٨٦	٧١	٧٩	٨٦
٧٩	٣٢	٨٨	٨٦
٨٢	٦٩	٧١	٧٠
٨٦	٨١	٨٥	٨٦

(أ) **تسوق:** سجّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

(ب) **كتب:** في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠.

تقييم نتائج الدراسات المسحية: بعد تنفيذ الدراسة المسحية يتم تلخيص البيانات، ويُعد تقرير حول نتائج الدراسة واستنتاجاتها. ومع ذلك فقد يؤدي التحيز أحياناً إلى أخطاء في البيانات فضلاً عن أخطاء في طريقة تفسيرها وفي التقرير المكتوب عنها؛ لذا يجب أن تكون قادراً على الحكم على مصداقية هذه التقارير من خلال التحقق من أن العينة عشوائية وكبيرة وممثلة للمجتمع تمثيلاً جيداً، وأن مصدر البيانات موثوق به. وغالباً ما تقدم الصحف اليومية والمجلات والتقارير المتلفزة نتائج دراسات مسحية، تحتاج إلى الحكم على مصداقيتها قبل اتخاذ قرار يعتمد عليها، ويمكن أن تطرح بعض الأسئلة على نفسك من أجل ذلك مثل:

- ما مجتمع الدراسة؟ وما العينات المختارة منه؟ وهل أستطيع تحديدها بسهولة؟ وهل هي متحيزة؟
- ما مصدر البيانات؟ وهل هو موثوق به؟ وهل يمكن أن يكون متحيزاً؟
- هل تدعم البيانات الاستنتاجات فعلياً؟

تنبيه

النسبة المئوية

تحقق دائماً من أن الدراسة المسحية التي تعطي بياناتها على صورة نسب مئوية تدل على حجم العينة.

مثال ٢: تقييم دراسة مسحية

كتاب الجامعة السنوي: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
إلكترونيًا فقط	٦٧٪
ورقيًا فقط	٢٢٪
إلكترونيًا وورقيًا	٩٪
لا تفضل	٢٪

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية.

الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًا فقط.

ذكر التقرير أن اختيار الطلاب كان عشوائياً، ولم يذكر عددهم، كما أن النتائج أُعطيت بنسب مئوية؛ فالنسبة ٦٧٪ قد تعني ٣٤ من ٥٠، وهذه ليست عينة كافية لتمثل جامعة كبيرة.

تحقق من فهمك

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جداً	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعاً ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غير معقولة أبداً	٥٨

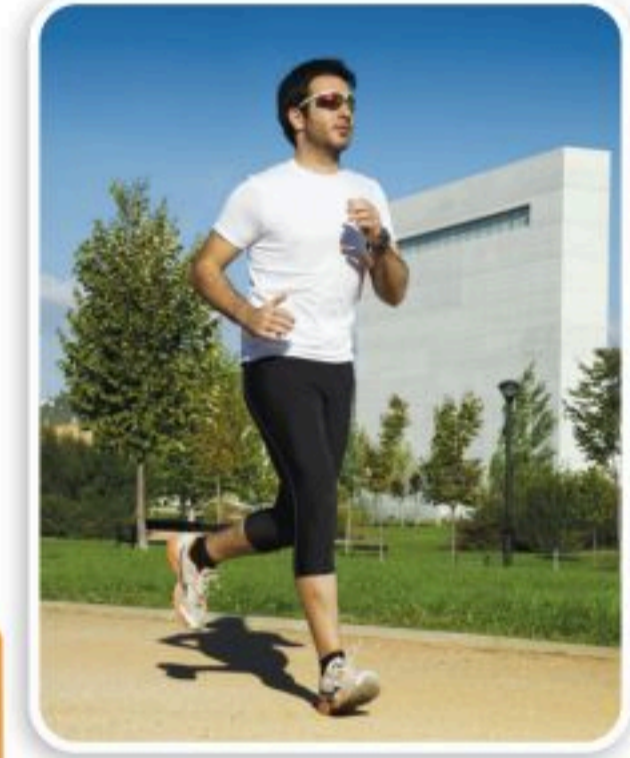
(٢) **مدينة ألعاب:** إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائر لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:
السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟
الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
توظيف وسائل التواصل الاجتماعي	٢٥%
توزيع النشرات والمطويات	٥%
إقامة قوافل تثقيفية من قبل المدرسة	٣٠%
حضور فريق من لجنة مكافحة المخدرات	٤٠%

(٣) **التوعية بخطر المخدرات:** يمثل الجدول التالي بيانات دراسة مسحية، حيث أرسلت الاستبانات بصورة عشوائية إلكترونياً، إلى جميع طلاب المرحلة المتوسطة، عبر منصة مدرستي. حدّد صحّة الاستنتاجات الآتية:
هدفت الدراسة إلى الإجابة عن السؤال: هل يجب أن تعدّ المدرسة قوافل تثقيفية؛ للتعريف بمشكلة المخدرات ومخاطرها المترتبة عليها؟ عيّنة الدراسة هي: طلاب الصف الثالث المتوسط.
نتيجة الدراسة هي: يفضل الطلاب حضور فريق من لجنة مكافحة المخدرات؛ لتوعيتهم بأضرار المخدرات.



- يمكن أن تؤثر طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية في طريقة تفسير نتائجها. وهذه بعض العوامل المؤثرة:
- إذا كانت أطوال فترات التدرّج في التمثيل البياني بالخطوط أو بالأعمدة أو بالمدرجات التكرارية كبيرة، فإن التغيرات تبدو بسيطة على الرغم من أنها قد تكون حقيقة مهمة. أما إذا كانت أطوال الفترات قصيرة، فإنها ستضخم التغيرات الطفيفة في التمثيل البياني.
 - وهذه بعض خصائص تمثيل النتائج التي يمكن أن تؤثر في الاستنتاج:
 - يجب أن تكون أطوال فترات التدرّج في التمثيل البياني ثابتة.
 - قد يعطي استعمال النسب المئوية بدلاً من القيم الفعلية لمجموعة البيانات نتيجة مضللة، ومع هذا يُفضل استعمال النسب المئوية إذا كان حجم العينة كبيراً.
 - يجب أن يكون لكل الأعمدة في التمثيل بالأعمدة أو المدرج التكراري العرض نفسه؛ فقد يؤدي تغيير عرض الأعمدة إلى تضخيم الاختلافات.
 - عند تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية أو بالأعمدة أو بالمدرج التكراري بدرجات لون واحد مختلفة قد تختلط المجموعات بصرياً وتؤثر في طريقة تفسير النتائج.



الربط مع الحياة

أثبتت الدراسات أن النشاط التربوي والحركي يزيد حيوية الطلاب ويشبع رغبتهم، ويحسن العمليات العقلية، ويركز انتباههم، ويزيد قدرتهم على التحصيل الدراسي والمشاركة والاندماج مع أقرانهم.

مثال ٣ نتائج مضللة



جمعيات النشاط: يفكر قائد مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط، فوزّع استبانة على الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

السؤال: ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط؟

الاستنتاج: لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب على جمعيات النشاط.

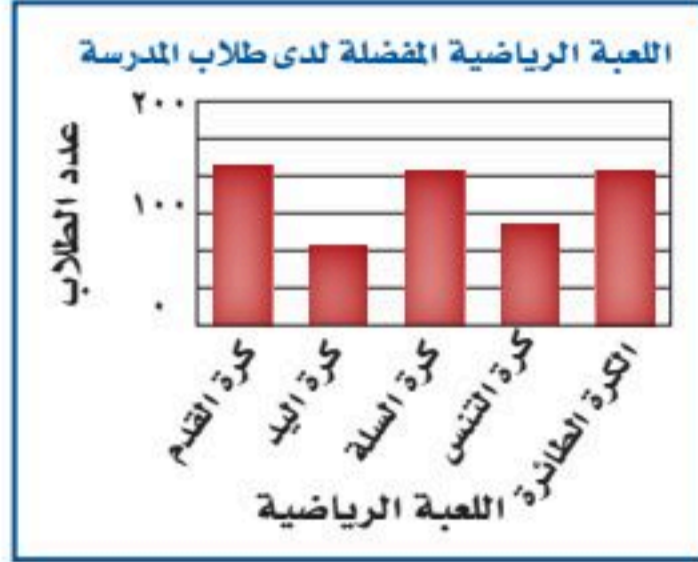
حدّد، إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية



وزارة التعليم

يبدو للوهلة الأولى أن معظم الطلاب موافقون على تطبيق النظام الجديد، ومع ذلك فإن أطوال فترات التدريب غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحوًا من ٤٥٠ طالبًا غير موافقين أو غير موافقين بشدة على هذا النظام الجديد، وأن عدد الموافقين يزيد قليلاً على ٣٠٠ طالب فقط. لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق.

تحقق من فهمك



٤) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.

السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.

حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

تأكد

مثال ١

أي مقياس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١) إعادة تدوير: ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠ سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٨.

٢) سياحة: تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

مثال ٢

حدّد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٢٦٪
دينية	٣٢٪
إخبارية	٣٩٪
تعليمية	٣٪

٣) تلفاز: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تم اختيارهم عشوائيًا تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ ردًا.

السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟

الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

٤) رياضة: استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.



مثال ٣

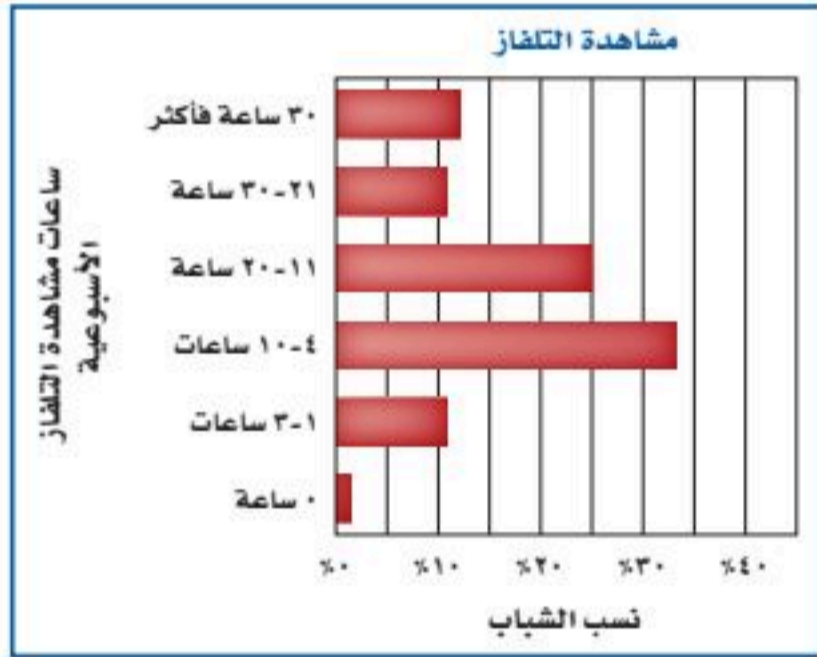
حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.



(٥) **مسحوق غسيل:** وزعت عينات من مسحوق غسيل على مجموعة من السيدات لمقارنته بمسحوق الغسيل الذي يستخدمه.

السؤال: ما رأيك باستبدال مسحوق القديم بالمسحوق الجديد

الاستنتاج: لن تستبدل معظم السيدات مسحوق الغسيل الذي يقمن باستعماله



(٦) **تلفاز:** أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أي مقياس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

(٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحًا لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزيائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، القصص ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

الأنشطة الصيفية		
٤٣٢	المخيمات	٦٥٠
٢٨١	المطالعة	٨٨٥
٥١٤	أخرى	١١٢٣

(٨) **أنشطة صيفية:** أجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

مثال ٢

حدّد صحة كلٍّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

(٩) **قيادة:** أجرت صحيفة استطلاعًا شمل ٧٥٠ شخصًا من سكان إحدى المدن. السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوّال في أثناء قيادة السيارة؟ النتائج: لا ٧, ٢٠٪؛ بضع مرات ٧, ٤٨٪؛ على الأكثر ١, ٥٪؛ دائمًا ٥, ٢٥٪. الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

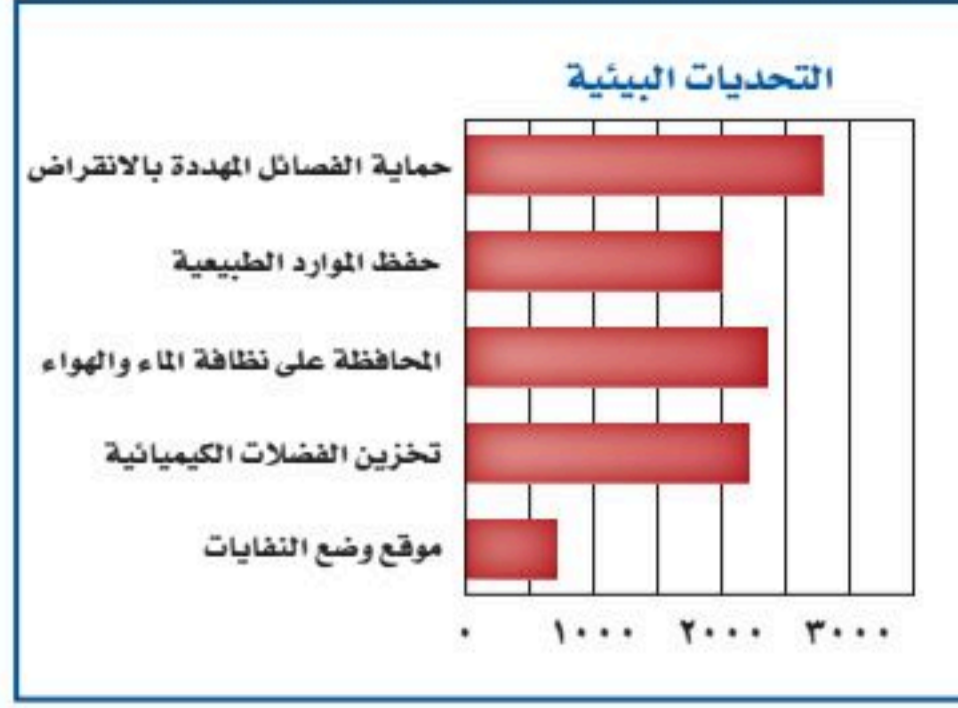
(١٠) **قراءة:** أجرت مجلة نسائية استطلاعًا طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب القراءة.

النتائج: للاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.



حدّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كلٍّ من الدراسات المسحية الآتية، وفسّر إجابتك.



(١١) **بيئة:** التمثيل بالأعمدة المجاور يمثل نتائج إجراء مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائياً.

السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.

(١٢) **تدريبات السلامة:** يعقد الهلال الأحمر دورات في السلامة مخصّصة لطلاب المدارس المتوسطة والثانوية. سجّل ٧٤٪ من المشاركين في برنامج السلامة البحرية، ١٠٪ في برنامج رعاية الأطفال، ١٦٪ في برنامج الإسعافات الأولية.

السؤال: هل يجب أن يستمر الهلال الأحمر في طرح برنامج رعاية الأطفال؟ استعمل البيانات في كتابة استنتاج عن دورات السلامة.

(١٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة طريقة أخرى لتحليل البيانات.

(أ) **حسيًا:** تجد أدناه توزيعًا لقطع نقود في مجموعات غير متساوية. ضع قطع نقود على الطاولة في مجموعات مماثلة للصورة.



(ب) **بيانيًا:** مثل هذه المجموعات بالنقاط، واكتب فوق كل عمود من النقاط الفرق بين عدد القطع في العمود والمتوسط الحسابي لعدد القطع في المجموعة الواحدة، ثم أوجد القيمة المطلقة لهذه الفروق.

(ج) **تحليليًا:** حرّك القطع لتجعل المجموعات متساوية، بحيث تحرك قطعة واحدة كل مرة، وتحرك القطعة مرة واحدة فقط، وعدّ الحركات. وضح مدى اختلاف المجموعات في الوضع الأصلي عنها في الوضع الجديد.

(د) **تحليليًا:** أوجد متوسط القيم المطلقة، وصف ما تمثله هذه القيمة، ووضّح معناها في هذه الحالة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(١٤) **تحّد:** أوجد مجموعة من الأعداد يكون المتوسط الحسابي لها أكبر من الوسيط.

(١٥) **مسألة مفتوحة:** صف دراسة مسحية ترغب في أن تجريها. وحدّد العينة والمجتمع والأسئلة وكيفية عرض النتائج.

(١٦) **اكتب:** اشرح لماذا قد تعرض إحدى الشركات نتائج الدراسة المسحية بصورة غير دقيقة. وأعط مثالاً للطريقة التي يمكن أن يتم بها ذلك.



الربط مع الحياة

تعمل جمعية الهلال الأحمر السعودي على نقل المرضى والمصابين والجرحى، وتوفير الإسعافات العاجلة الطارئة، وعمل الدورات التدريبية في برامجها المختلفة، وتقديم الخدمات والمساعدات الطبية لحجاج بيت الله الحرام ورعايتهم صحياً.



تدريب على اختبار

١٨) إذا كانت ٥, ٤ كيلومترات تعادل ٨, ٢ ميل تقريباً، فكم ميلاً تقريباً يساوي ١, ٦ كيلومترات؟

أ) ٣, ٢ أميال

ب) ٣, ٨ أميال

ج) ٣, ٦ أميال

د) ٤, ٠ أميال

١٧) إجابة قصيرة: بيعت ١٠٠٠ تذكرة في مهرجان. ثمن التذكرة ١٥ ريالاً للكبار، و٨ ريالاً للأطفال، فكانت حصيلة المبيعات ١٢٩٠٠ ريال، فما عدد تذاكر الأطفال المبيعة؟

مراجعة تراكمية

١٩) **كتب:** للتحقق من جودة الكتب التي تتم طباعتها يتم فحص الكتاب الخمسين من كل خمسين كتاباً تُطبع في المطبعة. حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، وهل هي متحيزة أم غير متحيزة؟ وإذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. (الدرس ١٠-١)

في السؤالين ٢٠-٢١ افترض أن Δ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب ج، ثم أوجد: (الدرس ٩-٧)

٢٠) جتا أ، ظا أ إذا كان $\sin A = \frac{1}{4}$

٢١) جتا أ، جتا إذا كان $\tan A = \frac{5}{3}$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال لكل مجموعة بيانات فيما يأتي، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم:

٢٢) ١١٠، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠

٢٣) ٤٨، ٣١، ٢٧، ٤٢، ٣٥، ١٤، ٢٥، ١٢

٢٤) ٨٥، ٢٥، ٦٥، ٣٥، ٤٥، ٦٥، ٥٥





إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

لماذا؟

في بداية حصة الرياضيات طلب المدرس من كل طالب في الصف سحب ٩ قطع نقدية عشوائياً من وعاء فيه ١٠٠٠ قطعة نقد من فئة النصف ريال، ثم إعادتها للوعاء بعد حساب متوسط تواريخ إصدار هذه العينة من قطع النقد.



ما وجه المقارنة بين متوسط تواريخ إصدار القطع التسع ومتوسط إصدار جميع القطع النقدية الألف الموجودة في الوعاء؟

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: تُستعمل في هذا الموقف

إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً. وهو ما يُسمى **الإحصاء الاستدلالي**. وفي الموقف المذكور أعلاه يسحب كل طالب عينة من قطع النقد من الوعاء، حيث تمثل قطع النقود الألف المجتمع. **والإحصائي**: مقياس يصف إحدى خصائص العينة. أما **المعلمة** فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. ويتم تقدير معالم المجتمع بناءً على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة؛ لأنها تمثل المجتمع كاملاً.

تعيين إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

مثال ١

عين العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.

(أ) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكونة من ٤٠ من طلبة المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة: مجموعة الطلاب الأربعة المتقدمين بطلبات المنح الدراسية.
المجتمع: جميع الطلاب طلبة المنح الدراسية.
إحصائي العينة: متوسط درجات الطلاب الأربعة.
معلمة المجتمع: متوسط درجات جميع طلبة المنح الدراسية.

(ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة: الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائياً من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.
المجتمع: جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.
إحصائي العينة: وسيط رواتب الممرضين في العينة.
معلمة المجتمع: وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

تحقق من فهمك

(١) **أغذية**: يتم اختيار عبوة عشوائياً من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يُؤخذ بدءاً من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُدوّن كتلتها ويُحسب المنوال لعينة كتل الإنتاج اليومي.

فيما سبق

درست تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها.

والآن

- أستعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
- أحلّ البيانات باستعمال إحصائيات العينة.

المفردات

الإحصاء الاستدلالي

الإحصائي

المعلمة

البيانات الوحيدة المتغير

مقاييس التشتت

الانحراف المتوسط

الانحراف المعياري

التباين



التحليل الإحصائي: تُسمّى البيانات التي تتضمن متغيراً واحداً **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضاً بمقاييس **التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. تذكر أن القيمة المطلقة لعدد معين هي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

مفهوم أساسي	الانحراف المتوسط
الخطوة ١:	أوجد المتوسط الحسابي.
الخطوة ٢:	أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.
الخطوة ٣:	اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.



الربط مع الحياة

تؤكد الدراسات على أهمية قراءة الشباب للكتب المناسبة لمراحلهم العمرية، حيث تسهم في بناء معارفهم وتوسيع مداركهم، وتدريبهم على مهارات التواصل، وتنمي قدراتهم الإبداعية.

مثال ٢ استعمال الانحراف المتوسط

قراءة: سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرأونها أسبوعياً. وقد تلقى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$18 = 9 + 1 + 2 + 3 + 3 = |5 - 14| + |5 - 4| + |5 - 3| + |5 - 2| + |5 - 2|$$

الخطوة ٣: اقسّم المجموع على عدد القيم: $3, 6 = 18 \div 6$

تحقق من فهمك

(٢) تسويق: رصد موزع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها

الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

استعمل الطريقة المبينة أدناه لحساب التباين والانحراف المعياري.

إرشادات للدراسة

رموز

يحسب المتوسط الحسابي للعينة وللمجتمع بالطريقة نفسها. وفي العادة يُرمز إلى متوسط العينة بالرمز \bar{x} ، ولكن سوف يستعمل هذا الرمز في هذا الكتاب ليدل على متوسط المجتمع.

أضف إلى

مطويتك

ملخص المفهوم التباين والانحراف المعياري

- الخطوة ١:** أوجد المتوسط الحسابي \bar{x} .
- الخطوة ٢:** أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.
- الخطوة ٣:** أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

مثال ٣

إيجاد التباين والانحراف المعياري

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ١٣، ١٢، ١١، ٦، ٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\bar{x} = \frac{45}{5} = \frac{13 + 12 + 11 + 6 + 3}{5} = 9$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$s^2 = \frac{2(9-13)^2 + 2(9-12)^2 + 2(9-11)^2 + 2(9-6)^2 + 2(9-3)^2}{5}$$

$$= \frac{2(4) + 2(9) + 2(4) + 2(9) + 2(36)}{5}$$

$$= \frac{74}{5} = 16 + 9 + 4 + 9 + 36 = 74$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$$s = \sqrt{\frac{74}{5}} = \sqrt{14.8}$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\sqrt{\frac{74}{5}} = \sqrt{14.8}$$

استعمل الحاسبة

$$s \approx 3.8$$

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{74}{5}$ ، والانحراف المعياري ٣,٨ تقريباً.

تحقق من فهمك

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

(ب) ١٠٠، ٨٣، ٧١، ٨٤، ٩٢

(أ) ٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨

إرشادات للدراسة

فئات البيانات

تُسمى البيانات الكمية باسم البيانات الناتجة عن القياس، وتُسمى البيانات النوعية باسم البيانات التصنيفية.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

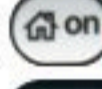

يمكن تفسير مدى انتشار البيانات من خلال الانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ٣، فإن معظم قيم البيانات قريبة جداً من المتوسط الحسابي، أما إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ١٥، فإن هذه البيانات متباعدة ومنتشرة على مدى أوسع، وقد يكون من بينها قيم متطرفة.

مثال ٤ من واقع الحياة التحليل الإحصائي

تغذية: يسجل خالد عدد السعرات الحرارية التي يتناولها كل يوم. أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات الآتية:

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد السعرات	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢١٠٠	٢٢٥٠	١٩٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠

x		
2000	\bar{x}	2078.57
2100	Σx	14550.
2250	Σx^2	3.05725E7
1900	$s_x := s_{n-1}$	234.267
2500	$\sigma_x := \sigma_{n-1}$	216.889

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري. واضغط على المفاتيح  ثم أدخل كل قيمة من قيم البيانات في القائمة مع الضغط على  بعد إدخال كل قيمة. ولإظهار قيمة الانحراف المعياري على الشاشة اضغط بالترتيب

menu 4:Statistics 1:Stat Calculations 1:One-Variable Statistics...

فيكون الانحراف المعياري ٢١٦,٩ تقريباً.

تحقق من فهمك

٤) رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

٢٠٠٠، ٢١٠٠، ١٩٠٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٥٠

أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع.

تأكد

مثال ١

عين العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

(١) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

(٢) **كتب:** أُجريت دراسة شملت عينة مكونة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

مثال ٢

(٣) **عمل إضافي:** أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ٠، ٦، ٩، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ٢٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال ٣ أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

(٤) ١٧،٢١،١٨،٤،٣ (٥) ٢١،١٨،١٥،١٢

مثال ٤ (٦) **إلكترونيات:** أجرى محمود مسحاً لعدد الأجهزة الإلكترونية الموجودة في منزل كل واحد من زملائه في الفصل فكانت إجاباتهم: ٣، ١٠، ١١، ١٠، ٩، ١١، ١٢، ٨، ١١، ٨، ٧، ١٢، ١١، ١١، ٥. أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات.

تدرب وحل المسائل

- مثال ١** عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيتين، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:
- (٧) اختيرت عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية، وسُئل أفراد العينة عن الوقت الذي يقضيه كل منهم في الأنشطة المنهجية الإضافية خلال الأسبوع.
- (٨) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكونة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس المتوسطة في المملكة. وسُئل أفراد العينة عن المبلغ الذي ينفقه كل منهم في الشهر.

مثال ٢ أوجد الانحراف المتوسط مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

عدد الأقراص المدمجة					
٢٦	٣٩	٥	٨٢	١٢	١٤
٠	٣	١٥	١٩	٤١	٦
٢	٠	١١	١	١٩	٢٩

(٩) **أقراص مدمجة:** طلب مدرس إلى طلاب الصف أن يحدّدوا عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكونها فكانت النتائج كما في الجدول المجاور.

(١٠) **مبيعات:** رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:

٢١، ٢٥، ١٣، ١٧، ٢٤، ١٨، ١٦، ٢٢، ١٧، ١٥، ٢٤، ١٦

مثال ٣ أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

(١١) ١٢، ٧، ٨، ٣ (١٢) ٧٥، ٧٤، ٨٣، ٧٨، ٧٦

مثال ٤ (١٣) **مزاد:** يرسم نجيب لوحات لمناظر طبيعية ويعرضها للبيع في المزاد. فكان ثمن بيع بعض هذه اللوحات بالريال: ٣٢٥، ٤٥٠، ٥٠٠، ٥٧٥، ٢٢٥، ٨٥٠، ٦٠٠، ٣٥٠، ٤٥٠، ٥٠٠. أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات إلى أقرب جزء من عشرة.

أطوال لاعبي فريق كرة السلة				
٢٠٣	١٩٦	٢١١	١٨٨	١٩٨
٢٠٣	٢١١	١٨٨	٢١١	١٧٥
١٩٨	٢١٦	٢٠٦	٢٠٦	٢٠١

(١٤) **كرة السلة:** بيّن الجدول المجاور أطوال لاعبي فريق كرة السلة في أحد الأندية الرياضية بالستيمترات.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للأطوال.



الرابط مع الحياة

يبلغ طول أطول لاعبي كرة السلة في المملكة ٢٠٨ سم.



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

(ب) إذا غيرنا اللاعب الذي طوله ١٧٥ سم بلاعب طوله متر وسبعون سنتيمتراً، فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. وصف أثر هذا التبديل في النتائج السابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(١٥) **اكتشف الخطأ:** تصف كل من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

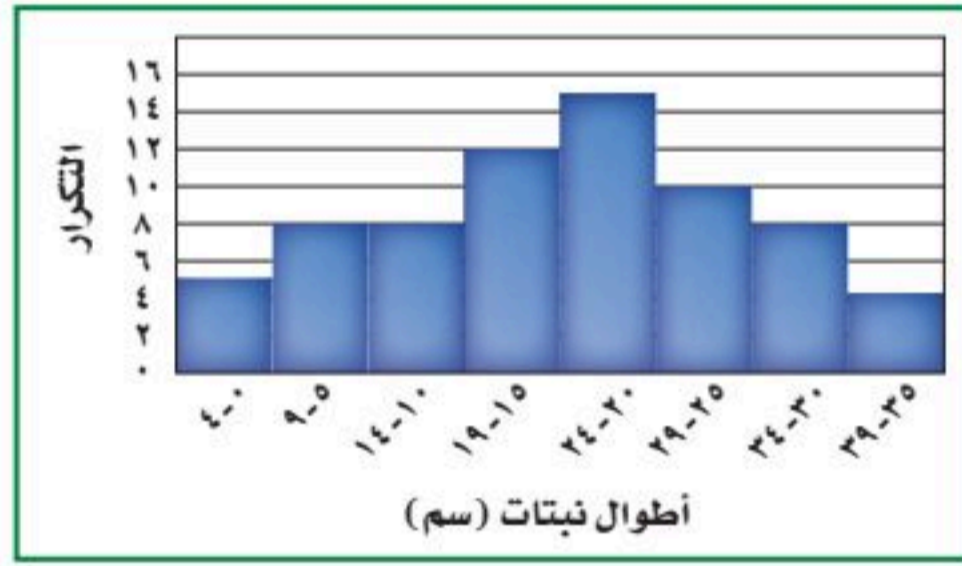
رغد

يجب اختيار عينة الدراسة
المسححية عشوائيًا، ويجب أن
تؤخذ عدة عينات عشوائية.

سحر

يجب أن تشتمل الدراسة
المسححية على أكبر عدد ممكن
من أفراد المجتمع.

(١٦) **تحّد:** أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجتمع البيانات الممثلة بالمدرج التكراري أدناه.



(١٧) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً، وفسّر إجابتك:

"العيتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما
المتوسط الحسابي والانحراف المعياري نفسهما".

(١٨) **مسألة مفتوحة:** صِف موقفاً من واقع الحياة يكون من المفيد فيه استعمال متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع. وِصِف طريقة اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع.

(١٩) **اكتب:** قارن بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط.

تدريب على اختبار

(٢١) أطوال أعلى ٧ أشجار في حديقة هي: ١٩، ٢٤، ١٧، ٢٦،
٢٤، ٢٠، ١٨ قدمًا. أوجد الوسيط لهذه الأطوال؟

(ج) ٢١

(د) ٢٤

(أ) ١٧

(ب) ٢٠

(٢٠) **إجابة قصيرة:** زارت مجموعة من الطلاب مبنى التلفزيون، فدخل ٢٠ طالبًا منهم إلى قسم الأخبار. فإذا شكّل هؤلاء الطلاب ١٦٪ من مجموعة الطلاب، فما عدد أفراد المجموعة؟



وزارة التعليم

الدرس ١٠-٣: إحصائيات العينة ومعالم المجتمع ٢٠٢٣
2025 - 1447

أيُّ مقياس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلِّ ممَّا يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس: (الدرس ١٠-٢)

(٢٢) **جمعيات النشاط:** كانت أعداد طلاب أحد الصفوف قد وُزعت على جمعيات النشاط على النحو الآتي:
٨، ١٢، ١٨، ٢٥، ٢١، ٥، ١٠، ١٤.

(٢٣) **درجات اختبار:** كانت درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات على النحو الآتي:
٧٨، ٨١، ٨٥، ٨٦، ٨٨، ٨٥، ٩٠، ٩١، ٨٥، ٩٥، ٩٨.

حدّد في كلِّ ممَّا يأتي، هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ وبرّر إجابتك: (الدرس ١٠-١)

(٢٤) **تسوق:** طُلب إلى كلِّ عاشر شخص يدخل إلى مجمع تجاري أن يُسمّي المتجر المفضل لديه.

(٢٥) **رياضة:** سُئل كلِّ خامس شخص في مهرجان رياضي عن القناة التلفزيونية التي يفضلها.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائياً بطاقة واحدة من كيسٍ يحوي ٣ بطاقات حمراء و ٦ بطاقات خضراء و ٥ بطاقات صفراء، و ٨ بطاقات برتقالية اللون، فأوجد كلا من الاحتمالات الآتية:

- | | | |
|------------------------|---------------------|----------------------------|
| (٢٦) ح (حمراء) | (٢٧) ح (برتقالية) | (٢٨) ح (صفراء أو خضراء) |
| (٢٩) ح (ليست برتقالية) | (٣٠) ح (ليست خضراء) | (٣١) ح (حمراء أو برتقالية) |



التباديل والتوافيق

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



أخبر المدرب نواف أنه سيكون خامس لاعب يضرب ركلة الترجيح، إذا انتهت المباراة إلى ضربات الترجيح. واعتمد المدرب الترتيب الأبجدي أساساً في تشكيل الفريق؛ لترتيب من يقوم بكرات الترجيح.

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظّم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهماً، وتُكتب جميع الترتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمّى كلٌّ من هذه الترتيب **تبديلاً**.

إذا كان في ذهن المدرب ٤ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الأربع الأولى، فإنه يمكن استعمال مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد التباديل الممكنة لهؤلاء الأربعة. فإذا اختير لاعب معين ليكون أول من يضرب، فلن يكون اسمه مطروحاً عند اختيار اللاعب الثاني؛ لأنه لا يمكن أن يضرب اللاعب ركلة الترجيح مرتين.

عدد التباديل	عدد خيارات اللاعب الأول	عدد خيارات اللاعب الثاني	عدد خيارات اللاعب الثالث	عدد خيارات اللاعب الرابع
ل	٤	٣	٢	١
٢٤ =	×	×	×	×

هناك ٢٤ طريقة ممكنة لترتيب أول أربعة لاعبين.

مثال ١ من واقع الحياة التباديل

رحلات: تخطط وكالة سياحة وسفر لرحلة سياحية، يزور المسافرون خلالها ٥ مدن في المملكة. بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة؟
عدد طرق ترتيب المدن = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
هناك ١٢٠ طريقة ممكنة لترتيب المدن الخمس.

تحقق من فهمك ✓

(١) **محاضرات:** دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعاً على ٦ مقاعد خالية في صفٍّ واحدٍ؟

يمكنك أن تكتب العبارة المستعملة في المثال ١؛ لحساب عدد التباديل للمدن الخمس $(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ في صورة ٥! وتقرأ "مضروب العدد خمسة".

أضف إلى

مطويتك

المضروب

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

الرموز: $n! = n(n-1)(n-2)\dots(3) \times 2 \times 1$ ، $n \geq 1$ ، أيضاً $0! = 1$

إذا كان في ذهن المدرب ٥ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الثلاث الأولى، فإنه يمكنك استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد التباديل.

$$\text{طرق اختيار اللاعب الأول} \times \text{طرق اختيار اللاعب الثاني} \times \text{طرق اختيار اللاعب الثالث} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠ \text{ تباديلاً}$$

لاحظ أن: $٥ \times ٤ \times ٣ = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{١ \times ٢}$ ؛ ويمكنك تعميم هذه العلاقة بالقانون الآتي:

قراءة الرياضيات

رموز

يمكن كتابة عدد التباديل لعناصر عددها n ، مأخوذة راءً في كل مرة بالرمز $n!$ أول (n, r) .

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي قانون التباديل

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (n) مأخوذة (r) عنصراً في كل مرة هو ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$

الرموز: $n! = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال ٢ من واقع الحياة استعمال قانون التباديل

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

$$\text{قانون التباديل} \quad n! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n = 10, r = 6 \quad 10! = \frac{10!}{(10-6)!}$$

$$\text{بسّط} \quad \frac{10!}{4!} =$$

$$\text{اقسم على العوامل المشتركة} \quad \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$\text{بسّط} \quad 101200 =$$

تحقق من فهمك ✓

(٢) لوحات: رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

إذا كان الترتيب مهماً في المجموعة، فإنها تمثّل تباديلاً. وإذا لم يكن الترتيب مهماً في المجموعة فإنها تمثّل توفيقاً.

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**. ولإيجاد التوافيق المكوّنة من حرفين من بين الحروف أ، ب، ج يجب أن تكتب جميع الترتيب التي يتكون كل منها من حرفين وهي:

أ ب أ ج أ ج أ ب ج ب ج ب

وبما أن الترتيب غير مهم في التوافيق، فإن أ ب و ب أ يمثلان الاختيار نفسه. أي أن هناك ٢! طريقة لكتابة الحرفين من دون ترتيب؛ لذا اقسّم عدد التباديل $n!$ على $٢!$ لحذف عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها.



وزارة التعليم

Ministry of Education
الدرس ١٠-٤: التباديل والتوافيق ٢٠٧
2025 - 1447

مثال ٣ من واقع الحياة التوافيق

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟
بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختيار اثنان منهم كل مرة.

$${}^n C_r = \frac{\text{عدد التباديل}}{\text{عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^5 C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$$

وبما أننا نختار اثنين في كل مرة، فإن عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها هو $2! = 2$.

$${}^5 C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

أي أن هناك ١٠ طرق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء.

تحقق من فهمك

(٣) **اختبار:** تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالاً. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

يمكنك التوصل من خلال ذلك إلى قانون التوافيق.



الربط مع الحياة

إن تشجيع الأبناء على المشاركة في الأعمال المنزلية له دور كبير في تكوين الشخصية، وتعويدهم تحمّل المسؤولية، كما يقوي الروابط والصلات بين أفراد الأسرة.

أضف إلى

مطويتك

قانون التوافيق

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها n مأخوذة (ر) عنصرًا كل مرة، يساوي ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$

$$\text{الرموز: } {}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال قانون التوافيق

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$\text{قانون التوافيق } {}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^8 C_5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!}$$

$$\text{بسّط } \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 4 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

$$\text{هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف}$$

تحقق من فهمك

(٤) **كتب:** أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتابًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات، و ٦ كتب علمية، و ٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟



وزارة التعليم

Ministry of Education
2025 - 1447

يمكن استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمال حادثة ما.

إرشادات للدراسة

ثلاثة أرقام:

يمكن اعتبار العدد ٠٢٥ رمزًا لفتح القفل، بينما لا يُعد العدد ٢٥ رمزًا لفتحه.

مثال ٥ من واقع الحياة إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل

أقوال: يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزًا مكونًا من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.

(أ) ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما أن ترتيب الأرقام في الرمز مهم، إذن هذه الحالة تمثل تباديل لعشرة أرقام مأخوذة ثلاثة في كل مرة.

قانون التباديل

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n=10, r=3$$

$$\frac{10!}{(10-3)!} =$$

بسط

$$\frac{10!}{7!} =$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

بسط

$$720 =$$

هناك ٧٢٠ رمزًا مختلفًا.

(ب) ما احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

نستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد الحالات التي تكون فيها الأرقام الثلاثة فردية. هناك ٥ أرقام فردية هي: ١، ٣، ٥، ٧، ٩، إذن عدد عناصر الحادثة يساوي ${}^5 P_3 = 60$.

$$\text{ح (الأرقام جميعها فردية)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \rightarrow \frac{60}{720} =$$

بالتبسيط

$$\frac{1}{12} =$$

احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية هو $\frac{1}{12} = 8\%$ تقريبًا

تحقق من فهمك

(٥) **شركات:** يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيسًا ونائبًا للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

(أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

(ب) إذا تم الاختيار عشوائيًا، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

تأكد

(١) **جوائز:** يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الست التي يوزعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صف واحد؟

أوجد قيمة كل مما يأتي:

$$(٢) {}^7 P_2 \quad (٣) {}^9 P_3 \quad (٤) {}^6 P_4 \quad (٥) {}^5 P_2$$

(٦) **إعادة تدوير:** وضع خالد حاويات لتجميع المواد التي سيُعاد تدويرها، على أن تكون هناك حاوية لكل من المواد الآتية: الزجاج والبلاستيك والورق والألومنيوم. بكم طريقة يمكن أن ينظم خالد هذه الحاويات في صف؟

وزارة التعليم

مثال ٥ (٧) **مثلجات:** يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت.

(أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

(ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟

(ج) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائياً، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ (٨) **تصوير:** اصطف الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس في صفٍ لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟

(٩) **مسابقات علمية:** وصل ٨ طلاب إلى المرحلة النهائية في مسابقات علمية. فبكم طريقة يمكن أن يقف هؤلاء الطلاب في صفٍ على منصة قاعة الاحتفالات؟

أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

الأمثلة ٢ - ٤

$$(١٠) ٦! \quad (١١) ١!^٥ \quad (١٢) ١!^٤ \quad (١٣) ٣!^٧$$

$$(١٤) ٦!^٧ \quad (١٥) ٣!^٥ \quad (١٦) ٥!^٥ \quad (١٧) ٣!^٥$$

(١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثاً من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

مثال ٥ (١٩) **كرات زجاجية:** يوجد في كيس ٢٠ كرة زجاجية، منها ٧ كرات حمراء و ٨ زرقاء و ٥ خضراء. فإذا سُحبت ١٥ كرة من الكيس عشوائياً، فما احتمال سحب ٥ كرات من كل لون؟

(٢٠) **كرة قدم:** رشّح معلم التربية الرياضية ٩ طلاب من الصف الأول المتوسط، و ٦ طلاب من الصف الثاني المتوسط، و ٨ طلاب من الصف الثالث المتوسط؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعباً أساسياً.

(أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟

(ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائياً، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث المتوسط؟

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

(٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعاً.

(٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

(٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

(٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي».



(٢٥) **وظائف:** أجرى ٥١ شخصًا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤ بَدلاء.

(أ) هل تتضمن عملية الاختيار تباديل أم توافيق؟

(ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشح للوظيفة والبُدلاء الأربعة؟

(٢٦) **خزانة:** نسي هاني ترتيب الأعداد التي يستعملها لفتح خزانته. ولكنه يتذكر أنها تتكون من الأعداد ٥، ١٦، ٣١. فما العدد الأكبر للمحاولات التي ينفذها لفتح الخزانة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كلُّ من سلمى ونوف أن يكونا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كلُّ منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوّعت ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

$$\begin{aligned} \text{نوف} \\ \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{سلمى} \\ \frac{10!}{(4-10)!} = 5040 \end{aligned}$$

(٢٨) حدّد الموقف المختلف عن المواقع الثلاثة الأخرى فيما يأتي، ووضّح إجابتك:

اختيار ١٠ كرات ملونة من حقيبة.

اختيار ٥ متسابقين في مسابقة ثقافية.

تحديد ترتيب الطلاب الفائزين في إحدى المسابقات.

اختيار ٤ خيول من بين ٦ خيول للمشاركة في سباق.

(٢٩) **تبرير:** حدّد هل تكون العبارة $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا. فسّر إجابتك.

(٣٠) **اكتب:** اذكر موقفًا لاختيار ٣ أشياء من بين ٨ أشياء، على ألا يكون الترتيب فيه مهمًا.

تدريب على اختبار

(٣٢) مع سالم ٦٠ ورقة نقدية من فئتي عشرة ريالات وخمسة ريالات، قيمتها ٤٨٠ ريالًا. فكم ورقة معه من فئة عشرة ريالات؟

(أ) ٢٤

(ج) ٣٦

(د) ٤٠

(ب) ٣٠

(٣١) يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممرٍ في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟

(ج) ٣٣٦

(أ) ٣٤٢

(د) ٣٢٨

(ب) ٣٣٨



مراجعة تراكمية

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.
الدرس (٣-١٠)

(٣٤) ٥٠، ١٢، ٢٠، ٤٠، ١٠، ٣٠، ٢٠

(٣٣) ٨٩، ٧٢، ٤٧، ٥٩، ٤٧، ٧٦

(٣٥) مسح: أجرت إحدى شركات صنع العصائر دراسة مسحية؛ لمعرفة عدد العلب التي يشتريها الزبون في الأسبوع. فحصلت على الاستجابات الآتية: ١٤، ٧، ٣، ٠، ١٠، ١٢، ١٠، فأَي مقياس النزعة المركزية أفضل لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم أوجد هذا المقياس. الدرس (٢-١٠)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائياً قطعة بلاستيك واحدة من كيس يحوي ١٠ قطع حمراء و ١٢ قطعة زرقاء و ٨ قطع خضراء و ٤ قطع صفراء و ١٢ قطعة سوداء، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

(٣٨) ح (سوداء أو صفراء)

(٣٧) ح (حمراء)

(٣٦) ح (زرقاء)

(٤١) ح (ليست خضراء)

(٤٠) ح (ليست زرقاء)

(٣٩) ح (خضراء أو حمراء)





احتمالات الحوادث المركبة

لماذا؟

يرغب خالد في السفر من الرياض إلى جدة بالطائرة. وتشير تقارير شركة الطيران إلى وصول الطائرات في موعدها بنسبة ٩٢٪ من الرحلات. كما تشير إلى فقدان الأمتعة في ١٪ من الحالات. ما احتمال وصول طائرة خالد في موعدها وعدم فقدان أمتعته؟



فيما سبق

درست حساب احتمال بسيط.

والآن

- أجد احتمال حدثين مستقلين أو حدثين غير مستقلين.
- أجد احتمال حدثين متنافيين أو حدثين غير متنافيين.

المفردات

- الحادثة المركبة
- الحدثان المستقلتان
- الحدثان غير المستقلين
- الحدثان المتنافيتان

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تذكر أن الحادثة الواحدة، مثل الطيران إلى جدة تُسمى حادثة بسيطة. وأن **الحادثة المركبة** تتكون من حدثين بسيطتين أو أكثر. فاحتمال وصول الطائرة في موعدها وعدم فقدان الأمتعة مثال على الحادثة المركبة. وقد لا يؤثر وصول الطائرة في موعدها على فقدان الأمتعة أو عدمه، وتُسمى هاتان الحادثتان **حدثين مستقلين**؛ لأن نتيجة إحداهما لا تؤثر في نتيجة الأخرى.

اضف الى مطويتك

مفهوم أساسي

احتمال الحوادث المستقلة

النموذج:

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معاً، يساوي حاصل ضرب احتمال الحادثة أ في احتمال الحادثة ب.

الرموز: $ح (أ و ب) = ح (أ) \times ح (ب)$

مثال ١ من واقع الحياة احتمال الحوادث المستقلة

كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائياً ثم أعيدت وُسحبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

$$\frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{6}{21} = \text{ح (سوداء)}$$

$$\frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{4}{21} = \text{ح (صفراء)}$$

$$\text{ح (سوداء و صفراء)} = \text{ح (سوداء)} \times \text{ح (صفراء)}$$

$$\text{عوض} \quad \frac{24}{441} = \frac{4}{21} \times \frac{6}{21} =$$

$$\text{الاحتمال يساوي } \frac{24}{441} = 5.4\%$$

تحقق من فهمك

(أ) ح (زرقاء وخضراء) (ب) ح (ليست سوداء وزرقاء)

عندما تؤثر نتيجة حادثة ما في نتيجة حادثة أخرى نقول عنهما: إنهما **حدثان غير مستقلين**، ففي المثال ١ إذا لم تُرجع الكرة التي سُحبت في المرة الأولى إلى الكيس، فإن سحب الكرتين يمثل حدثين غير مستقلين؛ لأن احتمال سحب الكرة الثانية يعتمد على لون الكرة التي سُحبت أولاً.

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

تذكر أن متممة مجموعة هي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى تلك المجموعة. افترض أنه يوجد في وعاء ٦ أقلام زرقاء و ٨ أقلام حمراء و ٧ أقلام خضراء و ٩ أقلام سوداء، فإن متممة سحب قلم أزرق هي سحب قلم أحمر أو أخضر أو أسود؛ لذا فإن احتمال سحب قلم أزرق يساوي $\frac{7}{30}$ ، واحتمال عدم سحب قلم أزرق يساوي $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ ، وبالتالي يكون مجموع احتمالي أي حادثتين متتامتين يساوي ١.

مثال ٢ من واقع الحياة الاحداث غير المستقلة

بطاقات: يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠. فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائياً من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المعطى في كل ممّا يأتي:

(أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

←	عدد البطاقات الحمراء	←	$\frac{1}{4} = \frac{10}{40} =$ ح (حمراء)
←	عدد البطاقات الكلي	←	
←	عدد البطاقات البيضاء	←	$\frac{10}{39} =$ ح (بيضاء)
←	عدد البطاقات المتبقية	←	
←	عدد البطاقات الحمراء المتبقية	←	$\frac{9}{38} =$ ح (حمراء)
←	عدد البطاقات المتبقية	←	

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$$\text{عوض} \quad \frac{10}{40} = \frac{9}{38} \times \frac{10}{39} \times \frac{1}{4} =$$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{10}{988} = 0,01$ تقريباً.

(ب) ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة)

بعد أن يسحب عبد الكريم البطاقتين اللتين تحملان الرقم ٤، إذن يبقى في الصندوق ٣٨ بطاقة. وبما أن البطاقتين المسحوبتين لا تحملان الرقم ٩، فإنه يوجد في الصندوق ٤ بطاقات تحمل الرقم ٩؛ وعليه فإن عدد البطاقات التي لا تحمل الرقم ٩ يساوي $38 - 4 = 34$.

ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة) = ح (أربعة) × ح (أربعة) × ح (ليس تسعة)

$$\frac{34}{38} \times \frac{3}{39} \times \frac{4}{40} =$$

$$\frac{17}{2470} =$$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{17}{2470} = 0,007$ تقريباً.

تحقق من فهمك

(١٢) ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة) (٢ب) ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

الحوادث المتنافية: تُسمى الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معاً حادثتين متنافيتين. افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة حمراء أو بطاقة زرقاء من وعاء يحتوي على بطاقات ملونة. بما أنه لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء وزرقاء في الوقت نفسه فتسمى هاتان الحادثتان حادثتين متنافيتين.

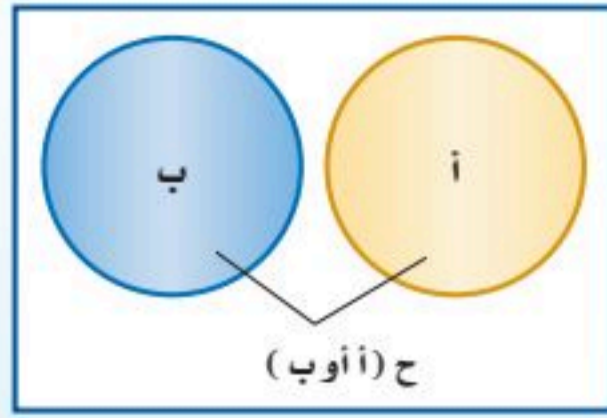
«و»، «أو»

ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «و» بالحوادث المستقلة وغير المستقلة، في حين ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المتنافية وغير المتنافية.

مفهوم أساسي

الحوادث المتنافية

أضف إلى مطبوتك



التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

مثال ٣ من واقع الحياة الحوادث المتنافية

أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

(أ) ح (٣ أو ٥)

بما أنه لا يمكن أن يظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في الوقت نفسه على وجه المكعب العلوي، فإن هاتين الحادثتين متنافيتان.

$$\begin{array}{l} \text{ح (ظهور ٣)} = \frac{1}{6} \\ \text{عدد الأوجه التي تحمل ٣} \rightarrow \\ \text{عدد أوجه المكعب جميعها} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ح (ظهور ٥)} = \frac{1}{6} \\ \text{عدد الأوجه التي تحمل ٥} \rightarrow \\ \text{عدد أوجه المكعب جميعها} \end{array}$$

$$\text{ح (٣ أو ٥)} = \text{ح (ظهور ٣)} + \text{ح (ظهور ٥)} = \text{احتمال الحوادث المتنافية}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

إذن احتمال ظهور الرقم ٣ أو ٥ عند رمي مكعب أرقام يساوي $\frac{1}{3} = 33\%$ تقريباً.

(ب) ح (٤ على الأقل)

ظهور ٤ على الأقل يعني ظهور ٤ أو ٥ أو ٦؛ لذا يجب أن تجد احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦.

$$\text{ح (٤ على الأقل)} = \text{ح (ظهور ٤)} + \text{ح (ظهور ٥)} + \text{ح (ظهور ٦)}$$

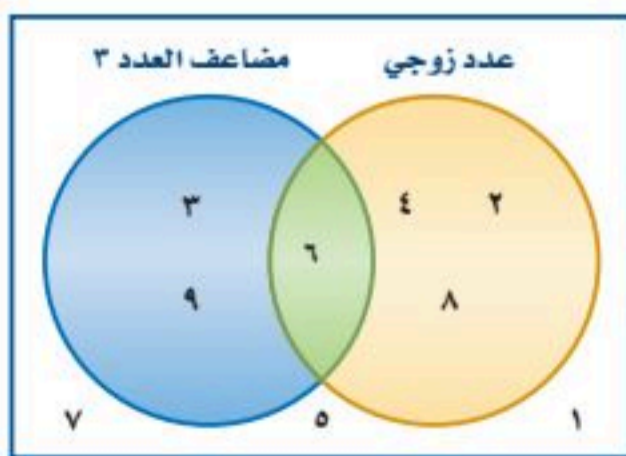
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

إذن احتمال ظهور ٤ على الأقل يساوي $\frac{1}{2} = 50\%$.

تحقق من فهمك

(أ) ح (أقل من ٣) (ب) ح (عدد زوجي)



افتراض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً زوجياً أو مضاعفاً للعدد ٣ عشوائياً من مجموعة مكونة من ٩ بطاقات مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٩. وبما أن العدد الظاهر على البطاقة يمكن أن يكون زوجياً ومضاعفاً للعدد ٣ في الوقت ذاته، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

ح (عدد زوجي) ح (مضاعف للعدد ٣) ح (زوجي ومضاعف للعدد ٣)

$$\frac{4}{9} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{1}{9}$$

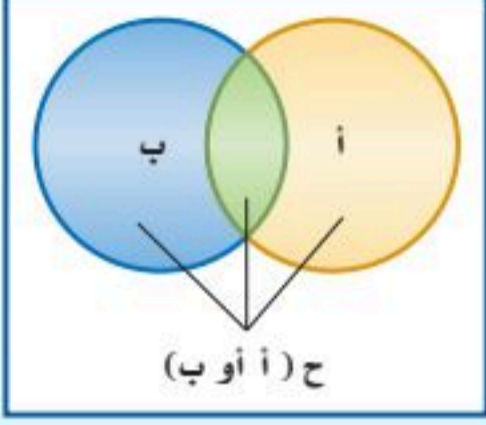
في الكسرين الأول والثاني السابقين حسب احتمال سحب العدد ٦ مرتين؛ إحداهما في حادثة ظهور عدد زوجي، والثانية في حادثة ظهور مضاعف للعدد ٣؛ لذا يتطلب إيجاد الاحتمال المطلوب أن نطرح ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) من مجموع الاحتمالين الأولين.
 إذن ح (عدد زوجي أو مضاعف للعدد ٣) = ح (عدد زوجي) + ح (مضاعف للعدد ٣) - ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) = $\frac{1}{9} - \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.

مفهوم أساسي الحوادث غير المتنافية

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معاً.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ و ب)

مطويتك أضف إلى



قراءة الرياضيات

أ و ب
 يختلف استعمال أ و ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معاً أيضاً.

مثال ٤ من واقع الحياة الحوادث غير المتنافية

الطلاب الرياضيون: يوجد من بين ٢٤٠ طالباً في مدرسة ما ١٧٦ طالباً متفوقاً علمياً و ٤٨ طالباً متفوقاً رياضياً. وهناك ٣٦ طالباً متفوقاً علمياً ورياضياً. اختير طالب عشوائياً فما احتمال أن يكون متفوقاً علمياً أو رياضياً؟

بما أن بعض الطلاب متفوقون علمياً ورياضياً فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضياً) = $\frac{48}{240}$ ، ح (متفوق علمياً) = $\frac{176}{240}$ ، ح (متفوق رياضياً وعلمياً) = $\frac{36}{240}$

ح (متفوق رياضياً أو علمياً) = ح (متفوق رياضياً) + ح (متفوق علمياً) - ح (متفوق رياضياً وعلمياً)

عوض $\frac{36}{240} - \frac{176}{240} + \frac{48}{240} =$

بسط. $\frac{47}{60} = \frac{188}{240} =$

الاحتمال يساوي $\frac{47}{60} = 78\%$ تقريباً.

تحقق من فهمك ✓

٤) مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

تنبيه !

تقاطع الحوادث
 عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين مرتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

تأكد ✓

المثالان ١، ٢

بين إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كل منها:

١) ألعاب الأطفال: يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائياً من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

٢) فواكه: تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ كمثرى. إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائياً وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟



(٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًا، وأعادته ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

المثالان ٣، ٤

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و ٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. حدّد هل الحادثان في كل ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

(٤) ح (٢ أو ٨) (٥) ح (حمراء أو زرقاء) (٦) ح (زوجي أو سوداء)

تدرب وحل المسائل

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

المثالان ١، ٢

(٧) **نقود:** إذا أُلقيت قطعة نقود ٤ مرات، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

(٨) **مكعب أرقام:** رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

(٩) **حلوى:** يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و ٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائيًا وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيًا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟

(١٠) **مكعب أرقام:** إذا أُلقي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور العدد نفسه في الرمتين؟

حدّد إذا كانت الحوادث الآتية متنافية أم غير متنافية، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها:

المثالان ٣، ٤

(١١) **لعبة البولينج:** تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يسقط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪، واحتمال عدم إسقاطها في المحاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأيّ إطار؟

(١٢) **صغار القططة:** أنجبت هرة ٨ قططة صغيرة: خمس إناث؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنتان ملونان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القططة الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحدًا برتقالي اللون أو أنثى عشوائيًا؟

يحتوي كيس على ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء و ١٠ خضراء، ورُقمت البطاقات من كل لون بالأعداد من ١ إلى ١٠، فإذا سُحبت بطاقتان من دون إرجاع، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

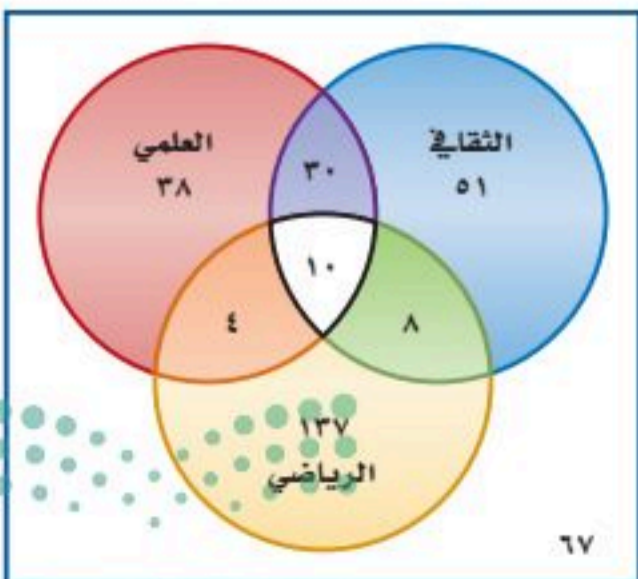
(١٣) ح (حمراء أو زرقاء) (١٤) ح (زرقاء أو بيضاء) (١٥) ح (١٠ ثم حمراء)

(١٦) ح (٨ ثم زرقاء) (١٧) ح (خمسة ثم خضراء) (١٨) ح (٣ أو ليست بيضاء)

(١٩) **النشاط المدرسي:** يمثّل شكل فن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.

(أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟

(ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟



الرابط مع الحياة

لعبة البولينج رياضة فردية أو جماعية، تُقدف فيها كرة من البلاستيك الثقيل (١٦ رطلاً) لتضرب قوارير خشبية أو بلاستيكية طول الواحدة منها حوالي ٣٨ سم، موضوعة في نهاية مضمار طوله ١٨ مترًا، وعرضه ١,٠٤ مترًا؛ بهدف إسقاط أكبر عدد منها وتسجيل نقاط.

ج) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاط الرياضي أو العلمي؟

د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟

٢٠) **حلولي:** يحتوي وعاء على ١٠ قطع حلوى حمراء، و٦ خضراء، و٧ صفراء و ٥ برتقالية. فما احتمال أن يتم اختيار ٣ قطع عشوائياً مع الإرجاع، على أن تكون الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة برتقالية؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كل من حمد وجمال تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

جمال	حمد
ح (زرقاء أو حمراء) $= ح (زرقاء) \times ح (حمراء)$ $= \frac{6}{26} \times \frac{8}{26}$ $= \frac{48}{676} = 7\% \text{ تقريباً}$	ح (زرقاء أو حمراء) $= ح (زرقاء) + ح (حمراء)$ $= \frac{6}{26} + \frac{8}{26}$ $= \frac{14}{26} = 54\% \text{ تقريباً}$

٢٢) **تبرير:** افترض أن هناك ٣ حوادث غير متنافية هي أ، ب، ج، واكتب جميع الاحتمالات التي يجب أخذها في الاعتبار عند حساب ح (أ أو ب أو ج)، ثم اكتب الصيغة التي تستعمل لحساب هذا الاحتمال.

٢٣) **مسألة مفتوحة:** صف موقفاً في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، وشرح الأسباب التي تجعل الحادثة مستقلة أو غير مستقلة.

٢٤) **اكتب:** اشرح لماذا يُستعمل الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين.

تدريب على اختبار

٢٦) **إجابة قصيرة:** إذا كان احتمال ظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد يساوي احتمال ظهور الكتابة، فما احتمال ظهور الكتابة إذا أُلقيت قطعة النقد مرة أخرى؟

أ) $\frac{1}{2}$	ج) $\frac{1}{4}$
ب) $\frac{1}{3}$	د) $\frac{3}{4}$

٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من ٤ أشخاص من بين ١٢ شخصاً؟

أ) ٤٨	ج) ٤٩٥
ب) ٤٨٣	د) ١١٨٨٠

مراجعة تراكمية

٢٧) **هندسة:** مستطيل عرضه $3\sqrt{5}$ سنتيمتر، وطوله $4\sqrt{10}$ سنتيمتر. أوجد مساحته. ثم اكتب الإجابة على شكل جذر في أبسط صورة. (الدرس ٩-٢)

حل كلاً من المعادلات الآتية، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٤)

$$(30) \quad 10 = 2 - \sqrt{4x - 3}$$

$$(29) \quad \sqrt{x} = 2\sqrt{5}$$

$$(28) \quad 6 = \sqrt{3 - x}$$



(١٣) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟

(١٤) **تعليم:** سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع. وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الطلاب	عدد الأيام
٦	١
١٨	٢
٣١	٣
٤٦	٤
٥٧	٥
٤٢	٦ أو أكثر

(أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في أكثر من خمسة أيام؟

(ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعات البيانات الآتية:

(١٥) (٤، ٥، ٥، ٦، ٦، ٦، ٩، ٨، ١٠) (١٦) (٢٢، ٢٥، ٢٧، ٣٠)

(١٧) **صحف:** تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت: ٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(١٨) **اختيار من متعدد:** لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمع طلابي اختير طالبان عشوائياً من كل صف من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟

(أ) بسيطة. (ب) متظمة.

(ب) طبقية. (د) لا شيء مما ذكر.

عين العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنف الطريقة المُستعملة لجمع البيانات:

(١) **لعب:** دعت شركة تنتج لعباً للأطفال ٥٠ طفلاً لاختيار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم.

(٢) **أزهار:** أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطى سن الـ ٥٠ سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل. احسب قيمة كل من المقادير الآتية:

(٣) l^7 (٤) q^{10}
(٥) q^7 (٦) l^6

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

(٧) **انتخابات:** رصد مركز انتخابات، أعمار الأشخاص الذين انتخبوا في ذلك المركز فكانت: ٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢

(٨) **تسوق:** رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يوم معين فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٤، ٥، ٣، ٢، ٣، ٢، ١٠.

بين إن كانت العينة في كل مما يأتي متحيزة أم غير متحيزة، وبرّر إجابتك:

(٩) **صحف:** أرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها.

(١٠) **تسوق:** سُئل كل شخص يغادر مجمّعاً تجارياً عن أفضل ٣ محال لبيع الملابس في المجمع.

(١١) **كتب:** بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟

(١٢) ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟



اختيار من متعدد

٥) ترتفع قمة جبل حتى ٢٠٣٧ مترًا فوق سطح البحر. فإذا تحدد موقع شخص يسير على هذا الجبل. بالدالة $m = 2037 - 2n$ ، حيث n عدد الدقائق، فأَيُّ ممَّا يأتي يُعدُّ أفضل تفسير لميل الدالة؟

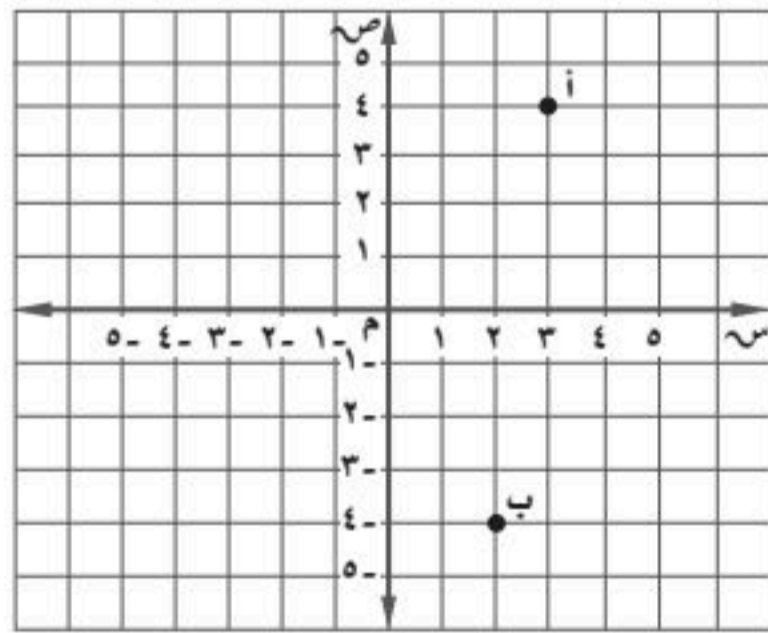
(أ) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا تحت مستوى سطح البحر.

(ب) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا فوق مستوى سطح البحر.

(ج) ينزل هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

(د) يصعد هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

٦) أوجد المسافة بين النقطتين أ و ب مقربًا الحل إلى أقرب جزءٍ من عشرة؟



(أ) ٨,١ (ب) ٨,٥

(ج) ٩,٦ (د) ١٠,٢

٧) ثمن تذكرة دخول المتحف للأطفال ٨ ريالًا، وللکبار ١٥ ريالًا. ما تكلفة دخول عائلة مكوّنة من ٤ أطفال ووالديهم؟

(أ) ٤٨ ريالًا (ب) ٦٢ ريالًا

(ج) ٧٦ ريالًا (د) ٩٠ ريالًا

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة.

١) بيّن الجدول الآتي عدد السّعرات الحرارية في ١٢ صنفًا من الأطعمة الخفيفة المختلفة. فما مقياس النزعة المركزية الأكثر تأثيرًا بالقيمة المتطرفة ٣٤٢ سُعرًا؟

عدد السعرات الحرارية في الأطعمة			
١٢١	١٤٩	٨٧	١٢٢
٧٢	٣٤٢	١٣٨	٦٤
١١٤	٩٩	١٠٥	١٧٩

(أ) المتوسط الحسابي (ب) الوسيط

(ج) المنوال (د) المدى

٢) أيُّ ممَّا يأتي ليس من عوامل $6s^2 - 27s$ ؟

(أ) $s + 3$ (ب) $s - 3$

(ج) $s + 3$ (د) $s - 3$

٣) لدى فاروق ٢٠ قصةً، ويريد أن يختار ٣ قصصٍ منها؛ ليأخذها معه في رحلة لبضعة أيام، فبكم طريقةٍ يمكنه أن يختار القصص إذا كان الترتيب غير مهم؟

(أ) ٦٠ (ب) ٨٤

(ج) ١١٤٠ (د) ١٤٨٢

إرشادات للاختبارات

السؤال ٣: بما أن الترتيب غير مهم، فإن المطلوب هو عدد التوافيق للقصص التي يمكن اختيارها.

٤) ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-1, 3)$ ، $(2, 3)$ ؟

(أ) $s - 6 = 9$ (ب) $s - 3 = 1$

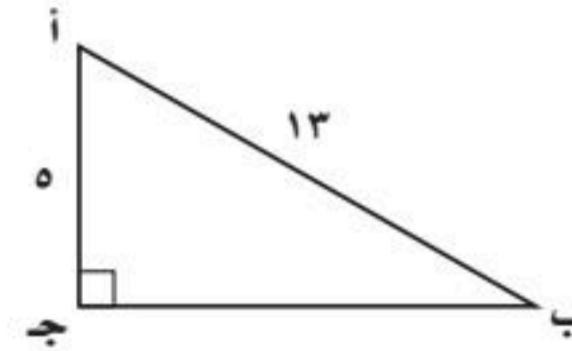
(ج) $s = 4$ (د) $s + 1 = \frac{2}{3}$



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨) ما قيمة جاب في الشكل أدناه؟ اكتب إجابتك في صورة كسر اعتيادي.



٩) أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية، موضحًا خطوات الحل، ثم قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

٦	٩	١١	١٤
١٣	١٥	١٦	١٠
١٠	١٩	١٢	٩

١٠) مع لطيفة علبة فيها ٥ قطع بسكويت بطعم البندق و ٧ قطع بطعم الشوكولاتة و ٩ قطع بطعم جوز الهند و ٤ قطع بطعم الفراولة. إذا اختارت قطعتين من العلبة عشوائيًا من دون إرجاع، فما احتمال أن تختار قطعة بطعم البندق، ثم قطعة بطعم الفراولة؟ اكتب الإجابة في صورة كسر اعتيادي.

١١) اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة مثلث ارتفاعه ٤ جـ ٣ د^٢، وطول قاعدته ٣ جـ د^٤ بالوحدات المربعة.

١٢) سجّل عدنان ٨٤ هدفًا خلال موسم كرة السلة، وكان مجموع النقاط لهذه الأهداف ١٨٣ نقطة. إذا علمت أنه يمكن أن يكون للهدف نقطتان أو ثلاث نقاط، فما عدد الأهداف التي حصل فيها على ٣ نقاط، والأهداف التي حصل فيها على نقطتين في هذا الموسم؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل.

١٣) أراد مجلس بلدية أن يُعيد تنظيم أحد أحياء المدينة. فقرر أعضاء المجلس أن يستطلعوا آراء سكان الحي. فاختر المجلس ٢٥٠ رب أسرة من سكان الحي عشوائيًا، ثم سألهم عبر الهاتف عن رأيهم في مشروع إعادة التنظيم. وبناءً على نتائج الاستطلاع، توصل المجلس إلى استنتاج أن ٧١٪ من سكان الحي يؤيدون إعادة التنظيم.

أ) حدّد العينة.

ب) صِف المجتمع الذي اختيرت منه.

ج) هل طريقة جمع البيانات التي استعملها المجلس دراسة مسحية أم تجريبية أم دراسة قائمة على الملاحظة؟ اشرح إجابتك.

د) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

هـ) إذا كانت العينة غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسّر إجابتك.

أدرب



من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

للاطلاع على المزيد

أنا طالبٌ معدٌّ للحياة، ومنافسٌ عالمياً.

للمساعدة ..

١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
١-٢٠	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٥-١٠	٣-١٠	٧-٩	مهارة سابقة	٥-٩	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٤-١٠	مهارة سابقة	٢-١٠	فراجع الدرس ..

